1) ($\Rightarrow$) Έστω $X \sim Exp(\lambda)$. Τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} &, x > 0 \\ 0 &, \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$\bar{F}_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} &, x > 0 \\ 1 &, \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Ο ρυθμός βλάβης είναι

$$r(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda \quad , x > 0.$$

Άρα, η X έχει σταθερό ρυθμό βλάβης

($\Leftarrow$) Έστω ότι μία τ.μ. X έχει σταθερό ρυθμό βλάβης λ, δηλαδή

$$r(x) = \lambda \quad , x > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = \lambda \quad , x > 0 \xrightarrow{f(x) = -\bar{F}_X'(x)}$$

$$\lambda \bar{F}_X(x) + \bar{F}_X'(x) = 0 \quad , x > 0 \xRightarrow{\cdot e^{\lambda x}}$$

$$\lambda e^{\lambda x} \bar{F}_X(x) + e^{\lambda x} \bar{F}_X'(x) = 0 \quad , x > 0 \Rightarrow$$

$$\left(e^{\lambda x} \bar{F}_X(x)\right)' = 0 \quad , x > 0 \Rightarrow$$

$$\bar{F}_X(x) = c e^{-\lambda x} \quad , x > 0$$

Εφόσον $X \geq 0$, $\bar{F}_X(0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$.

Άρα $\bar{F}_X(0) = c e^{-\lambda 0} \Rightarrow c = 1$

Οπότε $\bar{F}_X(x) = e^{-\lambda x} \quad , x > 0 \Rightarrow X \sim Exp(\lambda)$

2) Έστω $X \sim Erlang(n, \lambda)$ τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} & , x > 0 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Οπότε $\bar{F}_X(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$, $x > 0$.

Ο ρυθμός βλάβης είναι

$$r(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \cancel{e^{-\lambda x}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \cancel{e^{-\lambda x}} \frac{(\lambda x)^k}{k!}}$$

Οπότε

$$r'(x) = \frac{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} (n-1) x^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k (\lambda x)^{k-1} \lambda}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right)^2}$$

$$r'(x) = \frac{\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-1) \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{(\lambda x)^k}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right)^2}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^n}{(n-2)!} x^{n-2} + \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-1-k) \frac{(\lambda x)^k}{k!}}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right)^2} > 0$$

$\Rightarrow$ $r(x) \nearrow$ για $x > 0$

3)
$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = \sum_{i=1}^{n} P(X > x \mid I = i)\, P(I = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} a_i$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X \mid I = i]}_{E[Y_i] = 1/\lambda_i} P(I = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} a_i$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X]$$
$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{n} E[X^2 \mid I = i]\, P(I = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E[Y_i^2]\, a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Var[Y_i] + E^2[Y_i]\right) a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i^2} + \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2\right) a_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\lambda_i^2} a_i$$
$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\lambda_i^2} a_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} a_i\right)^2$$

$$r(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} a_i}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i}$$

$$r'(x) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i^2) e^{-\lambda_i x} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{-\lambda_i x} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (-\lambda_i) e^{-\lambda_i x} a_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-\lambda_i^2 + \lambda_i \lambda_j)\, e^{-\lambda_i x} e^{-\lambda_j x} a_i a_j}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} (-\lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j - \lambda_j^2)\, e^{-\lambda_i x}\, e^{-\lambda_j x}\, a_i a_j}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} (\lambda_i - \lambda_j)^2\, e^{-\lambda_i x}\, e^{-\lambda_j x}\, a_i a_j}{\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} a_i} < 0$$

$\Rightarrow r(x) \searrow$ για x.

4) $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i=1,2,3$

X_1, X_2, X_3 ανεξάρτητες

$Y = \min\{X_1+X_2, X_3\}$

$F_Y(y) = ?$

Λύση: $Y = \min\{X_1+X_2, X_3\}$

$$P(Y>y) = P(X_1+X_2>y, X_3>y) \overset{X_i \text{ ανεξ}}{=\!=} P(X_1+X_2>y)\,P(X_3>y)$$

όπου

$$P(X_1+X_2>y) = \int_0^\infty P(X_1+X_2>y \mid X_2=x) f_{X_2}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty P(X_1+x>y)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \int_0^\infty P(X_1>y-x)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \int_0^y P(X_1>y-x)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx + \int_y^\infty P(X_1>y-x)\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \int_0^y e^{-\lambda_1(y-x)}\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx + \int_y^\infty 1\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}\,dx$$

$$= \lambda_2 e^{-\lambda_1 y}\int_0^y e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x}\,dx + \left[-e^{-\lambda_2 x}\right]_y^\infty$$

$$= \lambda_2 e^{-\lambda_1 y}\left[\frac{e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x}}{-(\lambda_2-\lambda_1)}\right]_0^y + \left[0+e^{-\lambda_2 y}\right]$$

$$= \lambda_2 e^{-\lambda_1 y}\left[\frac{e^{-(\lambda_2-\lambda_1)y}}{-(\lambda_2-\lambda_1)} + \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right] + e^{-\lambda_2 y}$$

$$= \frac{-\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2-\lambda_1} + e^{-\lambda_2 y} + \lambda_2\frac{e^{-\lambda_1 y}}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 y}$$

$$P(Y>y) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_3)y} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y}$$

$$F_Y(y) = 1-P(Y>y) = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-(\lambda_1+\lambda_3)y} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_3}e^{-(\lambda_2+\lambda_3)y}$$

5) Z = χρόνος ζωής μηχανής

$Z \sim Exp(\lambda)$

Επιθεωρητής περνά κάθε T χρ. μονάδες και ελέγχει ξεκινώντας από τη στιγμή 0.

X = χρονική στιγμή που ο επιθεωρητής βρίσκει τη μηχανή χαλασμένη

Y = χρονικό διάστημα που είναι χαλασμένη μέχρι να την βρει ο επιθεωρητής

Να βρεθούν οι

E[X]

και

E[Y]

Λύση.

$$E[X] = E[X \mid \underbrace{Z \le T}_{\text{η μηχανή χαλάει πριν τη 1η επιθ}}] P[Z \le T] + E[X \mid Z > T] \cdot P[Z > T] \Rightarrow$$

$$E[X] = T \cdot (1 - e^{-\lambda T}) + (T + E[X])\, e^{-\lambda T} \Rightarrow$$

$$E[Y](1 - e^{-\lambda T}) = T - Te^{-\lambda T} + Te^{-\lambda T} \Rightarrow$$

$$E[X] = \frac{T}{1 - e^{-\lambda T}}$$

$$Y = X - Z \Rightarrow$$

$$E[Y] = E[X] - E[Z] \Rightarrow$$

$$E[Y] = \frac{T}{1 - e^{-\lambda T}} - \frac{1}{\lambda}$$

6)

X_1 = χρόνος μέχρι να χαλάσει η 1η συσκευή του συστήματος A

X_2 = χρόνος από την 1η μέχρι τη 2η βλάβη στο σύστημα A

Z = χρονος ζωης του συστήματος A

$X_1 \sim Exp(2\lambda)$

$X_2 \sim Exp(\lambda)$

$Z = X_1 + X_2$

Y = χρόνος ζωης του συστηματος B

$$P(Z<Y) = \overbrace{P(Z<Y \mid X_1<Y)}^{=P(X_2<Y)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \overbrace{P(X_1<Y)}^{=\frac{2\lambda}{2\lambda+\mu}} + \underbrace{P(Z<Y \mid X_1>Y)}_{=0} P(X_1>Y)$$

$$= \frac{2\lambda}{2\lambda+\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

7| $\{N(t), t \geq 0\}$ PP με ρυθμό λ

$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) =$

Λύση

$$P(N(t)=k \mid N(t+s)=k+m) =$$

$$\frac{P(N(t)=k,\ N(t+s)=k+m)}{P(N(t+s)=k+m)} =$$

$$\frac{P(N(t)=k,\ N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)} \ \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξ}}{=}}$$

$$\frac{P(N(t)=k)\ P(N(t+s)-N(t)=m)}{P(N(t+s)=k+m)} \ \underset{\text{προσ}}{\overset{\text{ομ.}}{=}}$$

$$\frac{P(N(t)=k)\ P(N(s)=m)}{P(N(t+s)=k+m)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\ e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!}}{e^{-\lambda(t+s)}\frac{[\lambda(t+s)]^{k+m}}{(k+m)!}} =$$

$$\frac{(k+m)!}{k!\,m!}\left(\frac{t}{t+s}\right)^k\left(\frac{s}{t+s}\right)^m$$

8) σύστημα εξυπηρέτησης με s υπηρέτες
διαδικασία αφίξεων PP(λ)
χρόνος εξ ~ Exp(μ)
τη στιγμή 0, όλοι οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι
και κανένας πελάτης δε βρίσκεται σε αναμονή

(α) $P\left(\begin{array}{l}\text{ο επόμενος πελάτης}\\ \text{που θα φτάσει να βρει}\\ \text{όλους τους υπηρέτες}\\ \text{απασχολημένους}\end{array}\right) = p_1 = ?$

(β) Αν $N = \#$ αφίξεων πριν τη 1η εξυπηρέτηση,
να βρεθεί η $P(N=n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(γ) $P\left(\begin{array}{l}\text{ο επόμενος πελάτης που}\\ \text{θα φτάσει να βρει τουλ.}\\ \text{2 ελεύθερους υπηρέτες}\end{array}\right) = p_2 = ?$

Λύση

Έστω
Y_1 = ο χρόνος μέχρι την άφιξη του επόμενου πελάτη
$Y_1 \sim Exp(\lambda)$
X_1 = ο χρόνος μέχρι την 1η εξυπηρέτηση
$X_1 \sim Exp(s\mu)$
$\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία αφίξεων που είναι PP(λ)

(α) $p_1 = P(Y_1 < X_1) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s\mu}$

(β) $P(N=n) = P(N(X_1)=n) = \int_0^\infty P(N(X_1)=n \mid X_1 = t) f_{X_1}(t)dt$

$= \int_0^\infty P(N(t)=n)\, s\mu e^{-s\mu t} dt$

$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!} s\mu e^{-s\mu t} dt$

$= \dfrac{\lambda^n s\mu}{(\lambda+s\mu)^{n+1}} \underbrace{\int_0^\infty \dfrac{(\lambda+s\mu)^{n+1}}{n!} e^{-(\lambda+s\mu)t}\, t^n\, dt}_{=1}$

$= \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+s\mu}\right)^n \cdot \dfrac{s\mu}{\lambda+s\mu}$

$N \sim Geom\left(\dfrac{s\mu}{\lambda+s\mu}\right)$

(γ) Έστω X_2 ο χρόνος μέχρι την 2η εξυπηρέτηση :

$$p_2 = P(X_1 + X_2 < Y_1) =$$

$$\underbrace{P(X_1 + X_2 < Y_1 \mid X_1 > Y_1)}_{=0} P(X_1 > Y_1)$$

$$+ P(X_1 + X_2 < Y_1 \mid X_1 < Y_1) P(X_1 < Y_1)$$

$$= P(X_2 < Y_1 \mid \underbrace{X_1 < Y_1}_{\substack{\Downarrow \\ X_2 \sim Exp((s-1)\mu)}}) P(X_1 < Y_1)$$

$$= \frac{(s-1)\mu}{\lambda + (s-1)\mu} \cdot \frac{s\mu}{\lambda + s\mu}$$

9) Διαδικασια αφιξεων πελατων PP με ρυθμό 8

$N(t) \sim Poisson(8t)$

(α) $E[N(8)] = 8\,8 = 64$

$Var[N(8)] = 8 \cdot 8 = 64$

(β) $P(N(1/4) > 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(N(1/4) = k)$

$= 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-8\,1/4} \frac{(8\,1/4)^k}{k!}$

$= 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-2} \frac{2^k}{k!}$

(γ) $Cov(N(3)-N(1), N(4)-N(2)) =$

$Cov((N(3)-N(2)) + (N(2)-N(1)), (N(4)-N(3)) + (N(3)-N(2)))$

$= Cov(N(3)-N(2), N(4)-N(3)) +$

$Cov(N(3)-N(2), N(3)-N(2)) +$

$Cov(N(2)-N(1), N(4)-N(3)) +$

$Cov(N(2)-N(1), N(3)-N(2))$

$= Var[N(3)-N(2)] = Var[N(1)] = 8 \cdot 1 = 8$

10) Πελατες φθανουν σε τράπεζα με PP(10)

40% ειναι γυναικες

60% ειναι ανδρες

$E[\#$ γυναικων σε 1 ωρα | 10 άνδρες σε 1 ώρα$] = ;$

Λύση

$N(t) = \#$ πελατων μεχρι στιγμη t

$N_1(t) = \#$ γυναικών μέχρι στιγμη t

$N_2(t) = \#$ ανδρών μεχρι στιγμη t

$\{N(t), t \geq 0\}$ PP(10)

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ PP(4)

και

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ PP(6) καθως έχουμε διαχωρισμό Bernoulli της $\{N(t), t \geq 0\}$ με $p_1 = 0.4$ & $p_2 = 0.6$

$\{N_1(t), t \geq 0\}$, $\{N_2(t), t \geq 0\}$ ανεξαρτητες

$E[N_1(1) \mid N_2(1) = 10] = E[N_1(1)] = 4 \cdot 1 = 4$