9ο ΜΑΘΗΜΑ

23/3/2021

Λύση :

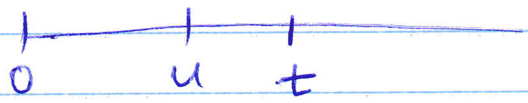
$$H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau} = E(N(t)) - \frac{t}{\tau} = E\left[N(t) - \frac{t}{\tau}\right]$$

Εφαρμόζω ανανεωτικό επιχείρημα

(δεσμεύω ως προς $S_1$)

$$H(t) = E\left[N(t) - \frac{t}{\tau}\right] = \int_0^\infty \underbrace{E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = u\right]} dG(u)$$

$u \le t$




$$E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = u\right] = E\left[N(t) \,\middle|\, S_1 = u\right] - \frac{t}{\tau}$$

$$= 1 + E\left[N(t-u)\right] - \frac{t}{\tau}$$

$$= 1 + \underbrace{E\left[N(t-u)\right] - \frac{t-u}{\tau}}$$

$$+ \frac{t-u}{\tau} - \frac{t}{\tau}$$

$$= 1 + H(t-u) - \frac{u}{\tau}$$

$u > t$


$$E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = u\right] = E\left[N(t) \,\middle|\, S_1 = u\right] - \frac{t}{\tau} = 0 - \frac{t}{\tau}$$

$$= -\frac{t}{\tau}$$

Άρα, $H(t) = \int_0^\infty E\left[N(t) - \frac{t}{\tau} \,\middle|\, S_1 = u\right] dG(u)$

$$= \int_0^t \left[1 + H(t-u) - \frac{u}{\tau}\right] dG(u) +$$

$$\int_t^\infty \left(-\frac{t}{\tau}\right) dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^t \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\tau}\, dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$D(t) = \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\tau}\, dG(u)$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u) - \int_t^\infty \left(1 - \frac{u}{\tau}\right) dG(u)$$

$$- \int_t^\infty \frac{t}{\tau}\, dG(u)$$

$$= \int_0^\infty dG(u) - \frac{1}{\tau}\int_0^\infty u\, dG(u) - \int_t^\infty 1\, dG(u) +$$

$$\frac{1}{\tau}\int_t^\infty (u-t)\, dG(u)$$

$$= 1 - \frac{1}{\tau}\cdot\tau - (1 - G(t)) + \frac{1}{\tau}\int_t^\infty (1 - G(u))\, du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_t^\infty (1 - G(u))\, du - (1 - G(t))$$

Αρα, $D(t) = D_1(t) - D_2(t)$ με

$$D_1(t) = \frac{1}{I}\int_t^\infty \underbrace{(1-G(u))}_{\geq 0}du, \quad D_2(t) = 1 - G(t)$$

$D_1(t) \downarrow$

$D_2(t) \downarrow$

$$0 \leq \underbrace{D_1(t) = \frac{1}{I}\int_t^\infty (1-G(u))du}_{D_1(t)} \leq \underbrace{\frac{1}{I}\int_0^\infty 1-G(u)du}_{D_1(0)}$$

$$= \frac{I}{I} = 1 < \infty$$

Αρα η $D(t)$ γράφεται σαν διαφορά δύο μη αρνητικών, μονότονων και φραγμένων συναρτήσεων.

$$\int_0^\infty |D(t)|dt < \infty$$

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty |D_1(t) - D_2(t)|dt \leq$$

$$\int_0^\infty |D_1(t)|dt + \int_0^\infty |D_2(t)|dt$$

$$= \int_0^\infty D_1(t)dt + \int_0^\infty D_2(t)dt$$

$$\int_0^\infty D_1(t)dt = \int_0^\infty \frac{1}{I}\int_t^\infty (1-G(u))du\,dt =$$

$\underline{\underline{0<t\leq u<\infty}}$ $\frac{1}{\tau}\int_0^\infty \underbrace{\int_0^u (1-G(u))\,dt}\,du =$

$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(u))\underbrace{\int_0^u dt}\,du = \frac{1}{\tau}\underbrace{\int_0^\infty (1-G(u))u\,du}$

$=$

$\frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(u))\left(\frac{u^2}{2}\right)' du = \frac{1}{\tau}\left[\cancel{(1-G(u))\frac{u^2}{2}}\right]_0^\infty +$

$\frac{1}{\tau}\int_0^\infty G(u)\frac{u^2}{2}\,du = \frac{1}{\tau}\frac{E[X_n^2]}{2} = \frac{Var(X_n)+E^2(X_n)}{2\tau}$

$= \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}$

$\int_0^\infty D_2(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G(t))\,dt = \tau < \infty$

$\int_0^\infty |D(t)|\,dt \leq \int_0^\infty D_1(t)\,dt + \int_0^\infty D_2(t)\,dt < \infty$

Εφαρμόζουμε το Β.Α.Θ :

$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty}\left(M(t)-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt =$

$= \frac{1}{\tau}\left(\int_0^\infty D_1(t)\,dt - \int_0^\infty D_2(t)\,dt\right) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau} - \tau\right) =$

$= \frac{\sigma^2-\tau^2}{2\tau^2}$

## 2.6 Χρόνοι $A(t) = t - S_{N(t)}$ (ηλικία)

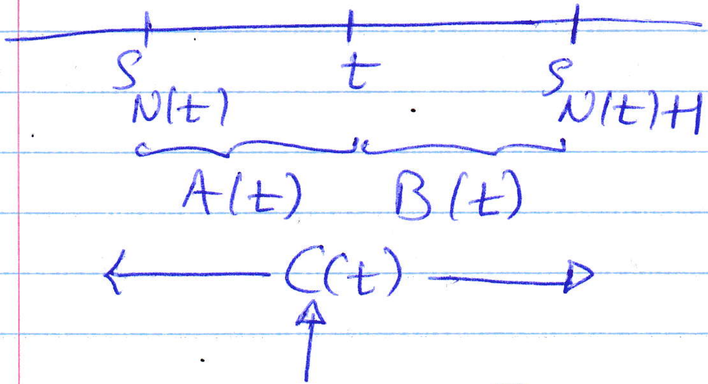
$B(t) = S_{N(t)+1} - t$

(προδρομικός) υπολ. χρόνος ανανέωσης

$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

ολικός χρόνος αναν.

$\{N(t), t \geq 0\}$ αναν. διαδ.




μήκος ενδ. χρόνου αναν

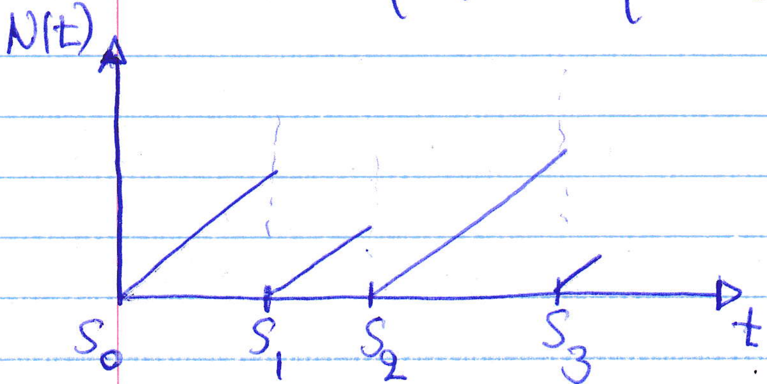
$A(t) = t - S_{N(t)}$

= χρόνος που πέρασε από το τελ. γεγ. έως τη στιγμή $t$

= ηλικία

= αναδρομικός χρόνος

= παρελθών χρόνος

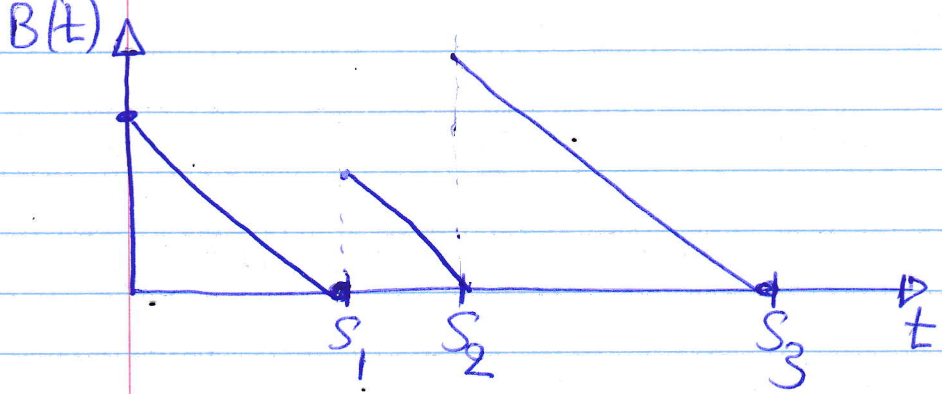


$B(t) = S_{N(t)+1} - t$

= χρόνος από την $t$ έως την 1η ανανέωση μέχρι την $t$

= υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

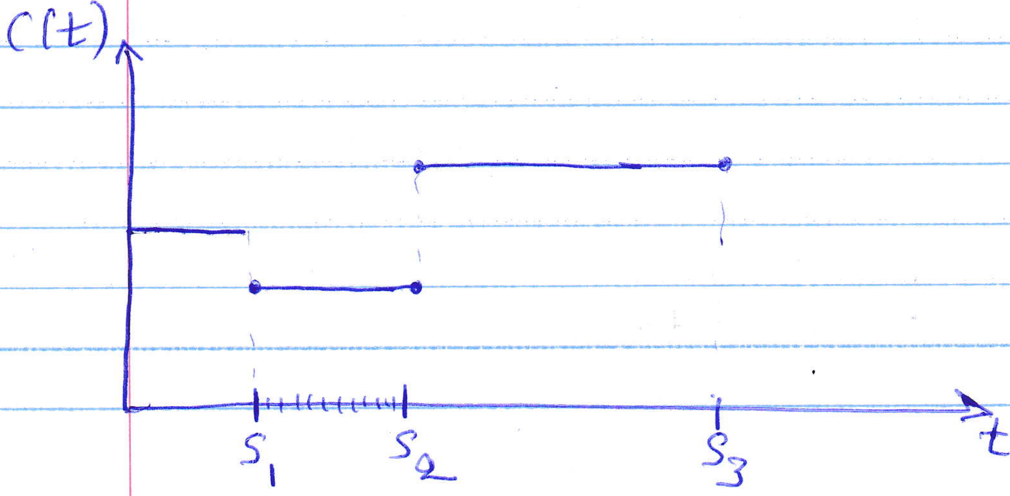
= προδρομικός χρόνος ανανέωσης.




$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

= μήκος των ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης που καλύπτει τη στιγμή $t$

= $t$-εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος




Οι ενδ. χρόνοι των γεγ. είναι τα ύψη στον άξονα των $C(t)$

## Άσκηση

Έστω $B(t)$ ο υπολειπ. χρόνος ανανέωσης μιας απεριοδικής ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$ με σ.κ. ενδ. χρόνων γεγονότων $G(t)$ και $EX_n = \tau < \infty$

Νδο για δεδομένα $x > 0$, η

$$H(t) = P(B(t) > x), \quad t \geq 0$$

ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$H(t) = 1 - G(x+t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

και $\lim\limits_{t \to \infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau} \int_x^\infty (1 - G(u))\, du$

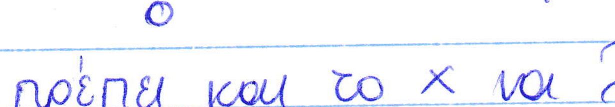
## Λύση:

$$H(t) = P(B(t) > x)$$

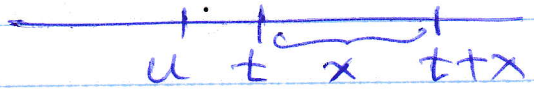
Δεσμεύοντας ως προς $S_1$ έχουμε

$$H(t) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid S_1 = u)\, dG(u)$$

πρέπει και το $x$ να ληφθεί υπόψιν

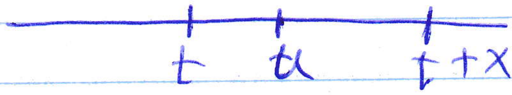


Αν $u \le t$



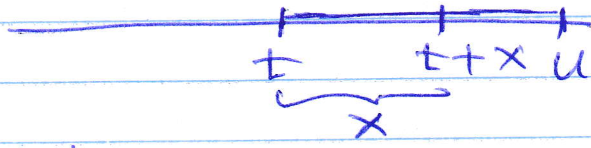

$$P(B(t)>x \mid S_1=u) = P(B(t-u)>x) = H(t-u)$$

Αν $t<u\le t+x$




$P(B(t)>x \mid S_1=u)=0$ ο υπολ. χρ. αναν. $<u-t$ και $u-t<x$ άρα $P(\ )=0$

Αν $u>t+x$




$$P(B(t)>x \mid S_1=u) = 1$$

Άρα, $H(t) = \int_0^\infty P(B(t)>x \mid S_1=u)\, dG(u)$

$$= \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_t^{t+x} 0\, dG(u) + \underbrace{\int_{t+x}^\infty 1\, dG(u)}_{1-G(t+x)} \Rightarrow H(t) = \underbrace{1-G(t+x)}_{P(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$D(t)$ είναι μονότονη, φραγμένη, μη αρνητική

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty (1-G(t+x))\,dt =$$

$\underset{=}{u=t+x}$ $\int_x^\infty (1-G(u))du \leq \int_0^\infty (1-G(u))du = \tau < \infty$

οπότε, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις

του ΒΑΘ

Τελικά,

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1-G(u))du$$

Προσοχή: Στον τρόπο και τις περιπτώσεις

διάσπασης των χρόνων διότι ο $x$

είναι χρόνος και μήκος διαστήματος.

Σημείωση:

Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε

ότι

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1-G(u))du$$

Για κάθε τ.μ. $X$ με σ.κ. $G$ και μ.τ. $\tau$

ορίζουμε μία νέα τ.μ. $X_e$ με σ.κ.

$$G_e(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^x (1-G(u))\,du$$

Παρατηρούμε ότι

$$G_e(\infty) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(u))\,du = \frac{\tau}{\tau} = 1$$

Η $G_e$ λέγεται κατανομή ισορροπίας της $G$. Έχουμε ότι $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = \overline{G_e}(x)$

$$= P(X_e > x)$$

Επίσης, $E(X_e) = \int_0^\infty (1-G_e(x))\,dx$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1-G(u))\,du\,dx$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u (1-G(u))\,dx\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty u(1-G(u))\underbrace{\int_0^u dx}_{u}\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty u(1-G(u))\,du$$

$$= \frac{1}{\tau}\,\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau} = \frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau^2}$$

Άρα η κατανομή της $B(t)$ καθώς $t \to \infty$ είναι η κατανομή ισορροπίας των ενδ. χρόνων γεγ.

<u>Άσκηση</u> (Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ απεριοδική RP με ενδ. χρ. αναμ. $X_n, n \geq 1$ με σ.κ. $G$ και μ.τ. $\tau$ : $0 < E(X_n) = \tau < \infty$ και $Var(X_n) < \infty$ ΝΔΟ

$$\lim_{t \to \infty} E(B(t)) = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\tau}$$