8º ΜΑΘΗΜΑ

18/3/2021.

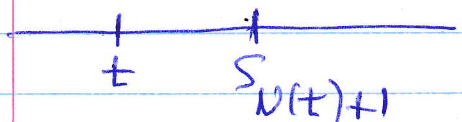
$\{N(t), t \geq 0\}$ RP με $\left.\begin{matrix} \\ E(X_n) = \tau > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{t} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$

Απ: (για $\tau < \infty$)

θέλω ανισώσεις της μορφής

$$\left(\quad < \frac{M(t)}{t} < \quad \right)$$

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] = \tau\left(M(t)+1\right)$$



$$S_{N(t)+1} > t \Rightarrow$$

$$E\left[S_{N(t)+1}\right] > t \Rightarrow$$

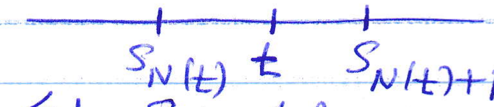
$$\tau\left[M(t)+1\right] > t \Rightarrow$$

$$M(t) > \frac{t}{\tau} - 1$$

$$\frac{M(t)}{t} > \frac{1}{\tau} - \frac{1}{t}$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\tau} \quad (1)$$

$M(t) \leq$



$S_{N(t)+1} < S_{N(t)} + \underbrace{X_{N(t)+1}} \leq t \qquad S_{N(t)} \leq t$

φτιάχνω ακ. ενδ. χρόνων φραγμένη από μία ποσότητα T

Έστω σταθερό $T \in (0,\infty)$ και ορίζουμε μία νέα ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων $\{X^*_n, n \geq 0\}$ **με** $X^*_n = \min\{X_n, T\} \leq T$, $n=1,2,\ldots$

Έστω $\{N^*(t), t \geq 0\}$ η ανανεωτική διαδικασία που αντιστοιχεί στις X_n

$\{S^*_n, n \geq 1\}$ η ανων. ακ. και $M^*(t)$ η ανων. συν. προκύπτει από την $\{X^*_n, n \geq 1\}$ και $E(X^*_n) = \tau^*$

Τότε, $S^*_{N^*(t)+1} = S^*_{N^*(t)} + X^*_{N^*(t)+1} \leq t + T \Rightarrow$

$E\left[S^*_{N^*(t)+1}\right] \leq t + T$

$\tau^*(M^*(t)+1) \leq t + T \Rightarrow$

$M^*(t) \leq \dfrac{t}{\tau^*} + \dfrac{T}{\tau^*} - 1 \Rightarrow$

$$\frac{M^*(t)}{t} \le \frac{1}{\tau^*} + \frac{T-\tau^*}{\tau^* t}.$$

$M^*(t) \geq M(t)$, διότι: $X_n^* \le X_n,\ n \geq 1 \Rightarrow$

περισ. γεγ. εως την t λόγω μικρότερων χρόνων

$S_n^* \le S_n,\ n \geq 1 \Rightarrow$

$N^*(t) \geq N(t),\ t \geq 0$

$E(N^*(t)) \geq E(N(t)),\ t \geq 0$

$M^*(t) \geq M(t),\ t \geq 0$

Οπότε, $\frac{M(t)}{t} \le \frac{M^*(t)}{t} \le \frac{1}{\tau^*} + \frac{T-\tau^*}{\tau^* t} \Longrightarrow$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \le \frac{1}{\tau^*},\quad \tau^* = E[X_n^*] = E[\min\{X_n, T\}]$$

καθώς $T \to \infty$ $\tau^* \to \tau$.

Αρα, $\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \le \frac{1}{\tau}$ (2)

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{1}{\tau} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \le \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$$

μακροπρόθεσμη (μέση) συχνότητα γεγ. ή

μακροπρ. μέσος αριθμός γεγ. εως τη στιγμή t

2.4 Ανανεωτική Εξίσωση

ΟΡΣ

Αν έχω μία γνωστή συνάρτηση $D(t)$, μία συνάρτηση κατανομής $G(t)$ με $\lim_{t\to 0^-} G(t)=G(0^-)=0$, $G(\infty)=1$ και μία άγνωστη συνάρτηση $H(t)$ τότε η εξίσωση

$$H(t)=D(t)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u) \Longleftrightarrow$$

$$H(t)=D(t)+(H*G)(t)$$

λέγεται ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$

Σημείωση

- Έχουμε δει την ανανεωτική εξίσωση για την $M(t)$: $M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-u)\,dG(u)$ και την ανανεωτική εξίσωση για την $E[S_{N(t)+1}]=H(t)$: $H(t)=\tau+\int_0^t H(t-u)\,dG(u)$
- Ανανεωτικές εξισώσεις προκύπταν χρησιμοποιώντας ανανεωτικό επιχείρημα, δηλ. δεσμεύοντας ως προς το χρόνο $1^{\underline{\text{ου}}}$ γεγ.

Θεώρημα (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης)

Αν $|D(t)|<\infty$ $\forall t\geq 0$ τότε υπάρχει μοναδική λύση της $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$ που δίνεται από τη σχέση

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM(u) \Leftrightarrow$$

$$H(t) = D(t) + (D*M)(u)$$

όπου $M(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση της ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους που έχουν σ.κ. G $\left(M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*(k)}(t)\right)$

Επίσης, ισχύει ότι $|H(t)|<\infty$, $\forall t\geq 0$

Απόδειξη:

$$H(t) = D(t) + (H*G)(t)$$

παίρνουμε LST

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\cdot\tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) - \tilde{H}(s)\tilde{G}(s) = \tilde{D}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\cdot\frac{1}{1-\tilde{G}(s)} = \tilde{D}(s)\Bigg(1 + \underbrace{\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}}_{\tilde{M}(s)}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \tilde{M}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\,\tilde{M}(s)$$

Αντιστρέφοντας τον LST

$$H(t) = D(t) + (D * M)(t)$$

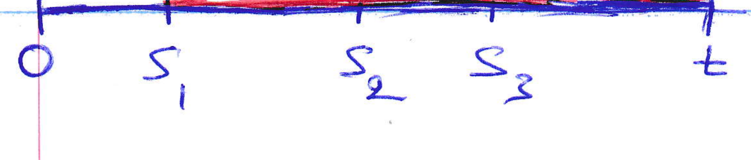
$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM(u)$$

Οικονομική Ερμηνεία Ανανεωτικής Εξίσωσης και λύση της

Έστω ότι κάποιο γεγονός της ανανεωτικής διαδικασίας αποδίδει αμοιβές από τη στιγμή που γίνεται και μετά.

$D(t)$: συνολική αμοιβή ενός γεγ. μέχρι t χρονικές μονάδες μετά την εκδήλωση του

$H(t)$: συνολική αμοιβή όλων των γεγονότων μέσα σε χρόνο t



Υποθέτουμε ότι έχει γίνει ένα γεγονός τη στιγμή 0 (το ονομάζω γεγονός 0) και οι ενδ. χρόνοι γεγ. έχουν σ.κ. $G(t)$.

<u>1ος τρόπος</u> (υπολογισμού $H(t)$)

συνολική αμοιβή από όλα τα γεγονότα έως τη στιγμή t = συνολική αμοιβή από το γεγονός 0 + συνολική αμοιβή από τα γεγ. που ξεκινάν στο S_1 έως τη στιγμή t

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + H(t - S_1) \Rightarrow$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$ ← ανανεωτική εξίσωση για $H(t)$

<u>2ος τρόπος</u>

συνολική αμοιβή από όλα τα γεγ. έως τη στιγμή t = συν. αμοιβή από το γεγ. 0 μέχρι την στιγμή t + συν. αμοιβή από το γεγ. 1 μέχρι τη στιγμή t

+ συν. αμοιβή από το γεγ. 2 έως t + . . .

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + D(t-S_1) + D(t-S_2) + \dots$$

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dG(u) + \int_0^t D(t-u)\, dG^{*(2)}(u) + \dots$$

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, d\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} G^{*(k)}(u)}_{M(u)} \Rightarrow$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM(u)$$

2.5 Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

ΟΡΣ (περιοδική τμ)

Μία αριθμητική τ.μ. X καλείται περιοδική αν $\exists\ d > 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = kd) = 1$$

Το μέγιστο d που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση λέγεται περίοδος της X.

Αν $\nexists$ τέτοιο d ονομάζεται απεριοδική.

Μία σ.κ. G λέγεται περιοδική (ή απεριοδική) όταν η αντίστοιχη τ.μ. είναι περιοδική (ή απεριοδική.)

Οι συνεχείς τ.μ είναι απεριοδικές.

Οι μη-αρνητικές ακέραιες τ.μ. είναι περιοδικές

<u>ΟΡΣ</u> (περιοδική ανανεωτική διαδικασία)

Μία ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται περιοδική (απεριοδική) αν οι αντίστοιχοι ενδ. χρόνοι γεγ. $X_n, n \geq 1$ είναι <u>περιοδικές</u> τ.μ. (απερ.)

<u>Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα</u>

Έστω $H(t)$ που ικανοποιεί την ανασ. εξ.

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$ όπου για $D(t)$

ισχύουν:

1) Η $D(t)$ είναι διαφορά μη αρνητικών, φραγμ. μονότονων συναρτ.

2) $\int_0^\infty |D(t)|\,dt$ είναι πεπερασμένο

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

α) Αν η G είναι απεριοδική με μ.Τ. $\tau > 0$

τότε $$\lim_{t \to \infty} H(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty D(u)\,du$$

8) Αν η G περιοδική με περίοδο d και μ.τ. $\tau > 0$, τότε $\lim_{t} H(kd+x) = \frac{d}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} D(kd+x)$

Άσκηση

Έστω $M(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση μιας $\{N(t), t \geq 0\}$ RP απεριοδικής με $0 < EX_n = \tau < \infty$ και $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty$.

Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την

$$H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau}$$

και νδο $\lim_{t \to \infty} H(t) = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{2\tau^2}$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις

$$\int_t^{\infty} (u-t)\, dG(u) = \int_t^{\infty} (1-G(u))\, du$$

$$\int_0^{\infty} u(1-G(u))\, du = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2}$$

$$\int_0^{\infty} u\, dG(u) = \tau$$

$$\int_t^{\infty} dG(u) = 1 - G(t)$$

Λύση

$$H(t) = M(t) - \frac{t}{\tau} = E(N(t)) - \frac{t}{\tau} =$$

$$= E\left[N(t) - \frac{t}{\tau}\right]$$

Εφαρμόζω ανανεωτικό επιχείρημα