7ο ΜΑΘΗΜΑ

16/3/2021

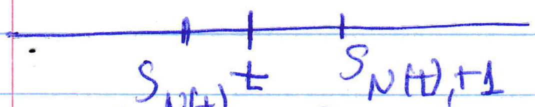
Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

$\{N(t), t \geq 0\}$ επαναληπτική ανανεωτική διαδ.

με $E(X_n) = \tau > 0$.

Τότε, $\lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$, μ.π.1

Απόδειξη



χρόνος τελευταίου γεγονότος
έως τη στιγμή t

$S_{N(t)+1}$: χρόνος 1ου γεγ. μετά
τη στιγμή t

$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

εφόσον $\{N(t), t \geq 0\}$ επαναληπτική

καθώς $t \to \infty$, $N(t) \to \infty$

Έχουμε $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$

$\overset{\text{ΙΝΜΑ}}{=} EX = \tau$, μ.π. 1

Επίσης, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n+1} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n+1} \frac{n+1}{n}$$

$$\overset{\text{ΙΝΜΑ}}{=} E(X) \cdot 1 = \tau, \text{ μ.π. } 1$$

Οπότε,

$$\frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \Rightarrow \limsup \frac{t}{N(t)} < \underbrace{\limsup \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}}_{\overset{\shortparallel}{\tau}}$$

$$\frac{t}{N(t)} \geq \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \Rightarrow \liminf \frac{t}{N(t)} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \tau$$

Άρα, $\tau \leq \liminf\limits_{t} \frac{t}{N(t)} \leq \limsup\limits_{t} \frac{t}{N(t)} \leq \tau$

$$\liminf_{t} \frac{t}{N(t)} = \limsup_{t} \frac{t}{N(t)} = \tau \Rightarrow$$

$\lim\limits_{t} \frac{t}{N(t)} = \tau$

Από τη συνέχεια της $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$

προκύπτει ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$

Υπενθύμιση

Laplace-Stieltjes Transforms

ΟΡΣ :

Έστω $X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ. $F_X(x)$. Ο L-S της X (ή της σ.κ. $F(x)$) ορίζεται ως

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx} dF_X(x)$$

Ιδιότητες

1) Η τ.μ. X και η σ.κ. $F_X(x)$ χαρακτηρίζονται από τον μετασχηματισμό L-S $\tilde{F}_X(s)$.

2) Αν X_1 και X_2 ανεξ. τ.μ. τότε

$$\tilde{F}_{X_1+X_2}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s)\tilde{F}_{X_2}(s)$$

ΟΡΣ (LST μιας συνάρτησης)

Έστω $F:[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$. Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της F ορίζεται ως $\tilde{F}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x)$

Ιδιότητες:

Αν $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ και $G:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ τότε

1) Αν $F(x)=1$ τότε $\tilde{F}(s)=1$

2) Αν $F(x)=x$ τότε $\tilde{F}(s)=\frac{1}{s}$

3) Αν $F(x)=1-e^{-\lambda x}$ τότε $\tilde{F}(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$

4) Αν $H(x)=aF(x)+bG(x)$ με $a,b\geq 0$ τότε
$\tilde{H}(s)=a\tilde{F}(s)+b\tilde{G}(s)$

5) Αν $H(t)=\int_0^t F(t-u)\,dG(u)$, $t\geq 0$ τότε
$\tilde{H}(s)=\tilde{F}(s)\tilde{G}(s)$

2.3 Ανανεωτική Συνάρτηση

ΟΡΣ Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία ανανεωτική διαδικασία. Η $M(t) = E[N(t)]$, $t \geq 0$ ονομάζεται ανανεωτική συνάρτηση. Ο LST της $M(t)$ συμβολίζεται με $\tilde{M}(s)$ και ισούται με

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dM(t)$$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} \{N(t), t \geq 0\} \text{ RP} \\ \text{με } G \text{ σ.κ. των } X_n, n \geq 1 \\ \text{και } G_k \text{ σ.κ. του } S_k, k \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t), t \geq 0}$$

Απ:

$M(t) = E[N(t)]$

$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}$ ως απαριθμήτρια γεγονότων

Αθροίζει όσα γεγ. συμβαίνουν πριν τη στιγμή t.

$$M(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}\{S_k \le t\}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E\left[\mathbb{1}_{\{S_k \le t\}}\right]$$

$$= \sum_{k\geq 1} P(S_k \le t)$$

$$= \sum_{k\geq 1} G_k(t)$$

Άρα $M(t) = \sum_{k\geq 1} G_k(t), \ t \geq 0$

<u>Θεώρημα</u> (Ανανεωτική Εξίσωση)

$\left.\begin{array}{l}\{N(t), t\geq 0\} \text{ RP με} \\ \text{ανανν. συνάρτηση } M(t), t\geq 0 \\ \text{και } G \text{ η σ.κ. των } X_n, n\geq 1\end{array}\right\} \Longrightarrow$

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Τεχνική !!

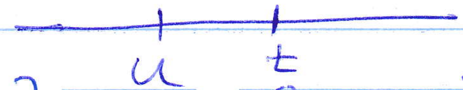
Απόδειξη

Εφαρμόζω Ανανεωτικό Επιχείρημα

Δεσμεύω ως προς S_1

$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^\infty \underbrace{E[N(t)|S_1=u]}\, dG(u)$$

Αν $u<t$,



$$E[N(t)|S_1=u] = 1 + E(N(t-u))$$

Αν $u \geq t$

$$E[N(t)|S_1=u] = 0$$

Άρα, $M(t) = \int_0^t (1+E(N(t-u))\,dG(u) +$

$$\int_t^\infty 0\, dG(u) \Rightarrow M(t) = \underbrace{\int_0^t 1\, dG(u)}_{G(t)} + \int_0^t E(N(t-u))\,dG(u)$$

$$\Rightarrow M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\,dG(u)$$

$$M(t) = G(t) + (M*G)(t), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

$$\tilde{M}(s) = \tilde{G}(s) + \tilde{M}(s)\tilde{G}(s)$$

$$\tilde{M}(s)(1-\tilde{G}(s)) = \tilde{G}(s)$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

Θεώρημα

Η ανανεωτική συνάρτηση $M(t)$ χαρακτηρίζει πλήρως την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$

Απ:

Γνωρίζουμε ότι μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$ χαρακτηρίζεται πλήρως από την G των $X_n, n\geq 1$.

Όμως, $\tilde{G}(s) = \dfrac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}$, οπότε

η $\{N(t), t\geq 0\}$ χαρακτηρίζεται και από την $M(t), t\geq 0$.

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} \{N(t), t\geq 0\} \text{ RP} \\ \text{με } \tau = EX_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M(t) < \infty, \ \forall t \geq 0.$$

Άσκηση

Αν $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ανανεωτική συνάρτηση $M(t)$ νδο

$$E[S_{N(t)+1}] = \tau (M(t)+1), \quad \tau = EX_n, \; n \geq 1$$

Λύση

$$E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] \, dG_1(u)$$

Για $u \leq t$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = E[S_{N(t-u)+1}] + u$$

Για $u > t$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u$$

το $1^{ο}$ γεγ. μετά τη στιγμή t γίνεται τη στιγμή u

$$H(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^t \left(u + E[S_{N(t-u)+1}]\right) dG(u) + \int_t^\infty u \, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \int_0^t u\,dG(u) + \int_0^t E\left[S_{N(t-u)+1}\right] dG(u) +$$

$$\int_t^\infty u\,dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^\infty u\,dG(u)}_{E(X)=\tau} + \int_0^t H(t-u)\,dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \tau + (H * G)(t)$$

Παίρνοντας μετ. L-S προκύπτει

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tilde{H}(s)\tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s)(1-\tilde{G}(s)) = \tau \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tau}{1-\tilde{G}(s)} = \tau \cdot \frac{1}{1-\tilde{G}(s)} \qquad \tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$\tilde{H}(s) = \tau\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right)$$

$$\tilde{H}(s) = \tau(1 + \tilde{M}(s))$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό παίρνουμε

μέσος # γεγ. μέχρι την t+1

$$H(t) = \tau(1 + M(t)) \Rightarrow E\left[S_{N(t)+1}\right] = \tau(1 + M(t))$$

μέσος χρόνος μέχρι 1^{o} γεγ. μετά t

Μέσος ενδ. χρόνος γεγ.

Σημείωση:

$E(S_{N(t)+1}) = \tau(M(t)+1)$ ισχύει

Όμως, $E[S_{N(t)}] \neq \tau M(t)$

Άσκηση 2 - Φυλλάδιο 2

Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για $E[S_{N(t)+k}]$, $k \geq 1$ και να λυθεί

Λύση:

Έστω

$$H(t) = E[S_{N(t)+k}] \overset{\text{Δεσμευση ως προς } S_1}{=} \int_0^\infty E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u]\, dG(u)$$

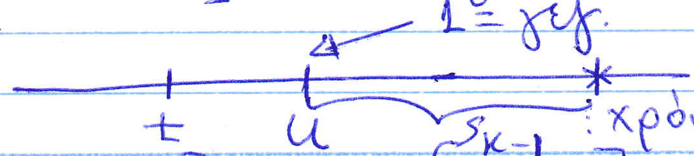
Αν $u<t$

Τη στιγμή u η διαδ. ξεκινά από την αρχή

$$E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u] = E[u + S_{N(t-u)+k}]$$

$$= u + E[S_{N(t-u)+k}] = u + H(t-u)$$

Αν $u>t$



χρόνος έως το κ-γεγ.

$$E[S_{N(t)+k} \mid S_1 = u] = u + E[S_{k-1}]$$

$= u + (\kappa-1)\tau$

Άρα, $H(t) = \int_0^t (u + H(t-u))\, dG(u) +$

$\int_t^\infty (u + (\kappa-1)\tau)\, dG(u) \Rightarrow$

$$H(t) = \int_0^t u\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u) + \int_t^\infty (\kappa-1)\tau\, dG(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = \underbrace{\int_0^t u\, dG(u)}_{E(X)=\tau} + (M * G)(t) + (\kappa-1)\tau \underbrace{\int_t^\infty dG(u)}_{1-G(t)}$$

$$\Rightarrow H(t) = \tau + (H * G)(t) + (\kappa-1)\tau(1-G(t))$$

Παίρνουμε μετασχηματισμό LS . . .

(Άσκηση)