$$= P(\underbrace{S_{k_1} \leq t_1, S_{k_1+1} > t_1}, S_{k_2} \leq t_2, S_{k_2+1} > t_2, \ldots,$$
$$S_{k_n} \leq 1, S_{k_n+1} > t_n)$$

$$= P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \ldots, N(t_n) = k_n)$$

11/3/2021 <u>6ο ΜΑΘΗΜΑ</u>

2.2 Ιδιότητες $\{N(t); t \geq 0\}$

α) Μεταβατική κατανομή

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP

$\{X_n, n \geq 0\}$ ακ. ενδ. χρ.

$\{S_n, n \geq 0\}$ ακ. χρόνων γεγ.

$G(t) = P(X_n \leq t)$, $t \geq 0$

$\tau = EX_n$, $\sigma^2 = Var(X_n)$, $s^2 = EX_n^2$

$G_k(t) = P(S_k \leq t)$

$P_k(t) = P(N(t) = k)$, $k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$

$\{N(t) \geq k\} \Leftrightarrow \{S_k \leq t\}$

Θεώρημα

$\{N(t), t\geq 0\}$ RP $\Longrightarrow P_k(t) = P(N(t)=k)$

$= G_k(t) - G_{k+1}(t), t\geq 0$

Απόδειξη:

$P_k(t) = P(N(t)=k) = P(\{N(t)\geq k\} \setminus \{N(t)\geq k+1\})$

$= P(N(t)\geq k) - P(N(t)\geq k+1)$

$= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1}\leq t)$

$= G_k(t) - G_{k+1}(t)$

Υπολογισμός $G_k(t) = P(S_k \leq t)$

Γνωρίζουμε $G(t) = P(X_n \leq t)$, $n\geq 1$

Για $k=1$: $G_1(t) = P(S_1 \leq t) = P(X_1 \leq t) = G(t)$, $t\geq 0$

Για $k=2$: $G_2(t) = P(S_2 \leq t) = P(X_1 + X_2 \leq t)$

$$= \begin{cases} \int_0^t P(X_1+X_2 \leq t \mid X_1 = u)\, f_{X_1}(u)\, du, & X_1 \text{ συνεχής} \\ \sum_{0\leq n\leq t} P(X_1+X_2\leq t \mid X_1 = n) P(X_1 = n), & X_1 \text{ διακριτή} \end{cases}$$

$$= \int_0^t P(X_1 + X_2 \leq t \mid X_1 = u)\, dG(u)$$

$$= \int_0^t P(X_2 \leq t-u \mid X_1 = u)\, dG(u)$$

$$= \int_0^t G(t-u)\, dG(u) = (G * G)(t) = G^{*(2)}(t)$$

Γενικά, $\int_0^t F(t-u)\, dG(u) = (F * G)(t)$

Άρα, $G_2(t) = G^{*(2)}(t) = \int_0^t G(t-u)\, dG(u)$

Για $\kappa = 3$:

$$G_3(t) = P(S_3 \leq t) = P(\underbrace{X_1 + X_2}_{S_2} + X_3 \leq t)$$

Δεσμεύω ως προς S_2 ή ως προς X_3.

Αν δεσμεύσω ως προς X_3, έχω:

$$G_3(t) = P(S_3 \leq t) = P(S_2 + X_3 \leq t) =$$

$$\int_0^t P(S_2 + X_3 \leq t \mid X_3 = u)\, dG(u)$$

$$= \int_0^t P(S_2 \leq t-u)\, dG(u) = \int_0^t G_2(t-u)\, dG(u) =$$

$$= \int_0^t G^{*(2)}(t-u)\, dG(u) = (G^{*(2)} * G)(t) = G^{*(3)}(t)$$

Δεσμεύω ως προς S_2:

$$G_3(t)=P(S_3\le t)=P(S_2+X_3\le t)$$

$$=\int_0^t P(S_2+X_3\le t\,|\,S_2=u)\,dG_2(u)$$

$$=\int_0^t P(X_3\le t-u\,|\,S_2=u)\,dG_2(u)$$

$$=\int_0^t G(t-u)\,dG^{*(2)}(u)=G*G^{*(2)}(t)=G^{*(3)}(t)$$

Άρα, $G_3(t)=G^{*(3)}(t)=\int_0^t G^{*(2)}(t-u)\,dG(u)$

$$=\int_0^t G(t-u)\,dG^{*(2)}(u)$$

Τελικά, $G_k(t)=P(S_k\le t)=G^{*(k)}(t)$

$$=\int_0^t G^{*(k-1)}(t-u)\,dG(u)$$

$$=\int_0^t G(t-u)\,dG^{*(k-1)}(u)$$

Αν $\tilde{G}(s)$ ο LST της X_n, δηλαδή

$\tilde{G}(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dG(t)$ τότε

και $\tilde{G}_k(s)$ ο LST της S_n, δηλ.

$\tilde{G}_k(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dG_k(t)$ τότε $\tilde{G}_k(s)=\tilde{G}^{*(k)}(s)=\left[\tilde{G}(s)\right]^k$

(ο μετ. L-S κάνει τη συνέλιξη γινόμενο)

$$G(t) \xrightarrow{LS} \tilde{G}(s) \xrightarrow{\tilde{G}_k(s) = [\tilde{G}(s)]^k} \tilde{G}_k(s) \xrightarrow[LST]{\text{αντιστρ.}} G_k(t)$$

<u>Ανανεωτικός Συλλογισμός</u>: Εκφράζουμε κάποια πιθανοθεωρητική ποσότητα ως ολοκλήρωμα δεσμεύοντας ως προς το χρόνο 1ου γεγονότος.

<u>Έκφραση για $P_k(t)$</u> (εφαρμόζοντας ανανεωτικό συλλογισμό)

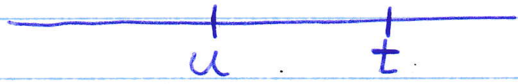
$$P_k(t) = P(N(t)=k)$$

<u>Έστω $k>0$</u>

$$P_k(t) = P(N(t)=k)$$ Δέσμευση στο χρόνο 1ου γεγ.

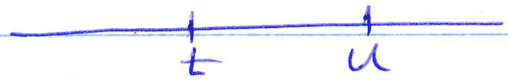
$$= \int_0^\infty \underbrace{P(N(t)=k \mid S_1=u)}\, dG(u)$$

Αν $u \le t$



$$P(N(t)=k \mid S_1=u) = P(N(t-u)=k-1)$$

Αν $u > t$



$$P(N(t)=k \mid S_1=u) = 0$$

$$P_k(t) = \int_0^t P(N(t-u) = k-1)\, dG(u) + \int_t^\infty \cancel{0\, dG(u)} \to 0$$

$$P_k(t) = \int_0^t P_{k-1}(t-u)\, dG(u) \quad , k>0$$

Για $k=0$, $P_0(t) = P(N(t)=0) = P(X_1 > t)$

$= 1 - G(t)$

$$\Longrightarrow \boxed{P_0(t) = 1 - G(t) \quad , t \geq 0}$$

Στέλνω τις λύσεις των ασκήσεων έως την Δευτέρα το πρωί και ανατίθεται η άσκηση που θα παρουσιάσω

Τρίτη 2-3 : Ασκήσεις

<u>Θεώρημα</u>

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP $\Rightarrow P(N(t) < \infty) = 1 \;, \forall t \geq 0$

(β) <u>Οριακή Συμπεριφορά</u>

οι ανανεώσεις (τα γεγονότα) συμβαίνουν σε πεπερ. χρόνο

$N(\infty) = \lim_{t \to \infty} N(t)$

<u>Θεώρημα</u>

$P(X_n < \infty)$

$\left.\begin{array}{l} \{N(t), t \geq 0\} \text{ RP} \\ G \text{ σ.κ. των } X_n, n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ - Αν $G(\infty) = 1 \Rightarrow$

$P(N(\infty) = \infty) = \underline{1}$

- Αν $G(\infty) < 1 \Rightarrow P(N(\infty)=k) = [G(\infty)]^k (1-G(\infty))$
$k = 0, 1, 2, \ldots$

μπορεί κάποιο γεγονός να συμβεί σε άπειρο χρόνο. Με πιθ. $1-G(\infty)$ δεν θα έχουμε ανανέωση.

Ορισμοί:

Μία ανανεωτική διαδ. λέγεται επαναληπτική αν $P(N(\infty)=\infty)=1$. Ενώ θα λέγεται μεταβατική αν $P(N(\infty)=\infty)<1$

- Στη συνέχεια θα μελετήσουμε επαναληπτικές διαδικασίες, δηλ. θα υποθέτουμε ότι $G(\infty)=1$

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\{N(t), t \geq 0\} \text{ RP} \\ E(X_n) = \tau\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_t \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}, \text{ μ.π. } 1$$

μακροπρόθεσμες # γεγονότων στη μονάδα του χρόνου
||
μακροπρόθεσμος ρυθμός ανανεώσεων
||
μακροπρόθεσμη συχνότητα ανανεώσεων

μέσος χρόνος μεταξύ γεγ.
||
Μέση περίοδος

Άσκηση

Μηχανή που αντικαθίσταται μόλις χαλάσει ή φθάσει σε ηλικία 3 χρόνων.
Χρόνος ζωής $L \sim \mathcal{U}[2,5]$

Να βρεθούν (i) μακροπρόθεσμος ρυθμός ανανέωσης

(ii) μακροπρόθεσμος ρυθμός αντικ. λόγω βλάβης

(iii) μακροπρ. ρυθμός αντικ. λόγω ηλικίας

Λύση:

$N(t)$: # αντικ. στο $(0,t]$

t

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP (η διαδ. ξεκινά από την αρχή με κάθε αντικ.)

(i) μακροπρόθεσμος ρυθμός ανανέωσης $= \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} \overset{a.s}{=} \frac{1}{EX}$

όπου X: χρόνος αντικατάστασης

$$E(X) = \underbrace{E[X \mid \underbrace{L<3}_{\substack{\text{αντικ.}\\\text{λόγω}\\\text{βλάβης}}}]}_{\sim \mathcal{U}[2,3]} P(L<3) + \underbrace{E(X \mid \underbrace{L \geq 3}_{\substack{\text{αντικ.}\\\text{λόγω}\\\text{ηλικίας}}})}_{} P(L \geq 3)$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3} + \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}} = \frac{17}{6}.$$

$$\text{Μακροπρόθεσμος Ρυθμός Ανανεώσεων} = \frac{1}{\frac{17}{6}} = \frac{6}{17}$$

(ii) $N_1(t)$: # αντικ. λόγω βλάβης στο $(0,t]$

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ είναι ανανεωτική RP

$$\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός αντικ. λόγω βλάβης} = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \overset{a.s}{=} \frac{1}{E[X_1]} = \frac{2}{17}$$

όπου X_1 χρόνος μεταξύ αντικ. λόγω βλάβης

Τεχνική!

Δεσμευση ως προς το επόμενο γεγονός

$$E(X_1) = E(X_1 \mid \underbrace{L<3}_{\substack{\text{αντικ. λόγω βλάβης} \\ \parallel \\ \text{επόμενο γεγονός} \\ \text{να είναι βλάβη}}}) P(L<3) + E(X_1 \mid \underbrace{L\geq 3}_{\substack{\text{αντικ. λόγω ηλικίας} \\ \parallel \\ \text{επόμενο γεγονός} \\ \text{ηλικία}}}) P(L\geq 3)$$

$$= 2.5\cdot\frac{1}{3} + (3 + EX_1)\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$E(X_1) = \frac{5}{6} + 2 + \frac{2}{3}E(X_1) \Rightarrow \frac{1}{3}E(X_1) = \frac{17}{6}$$

$$\Rightarrow EX_1 = \frac{17}{2}$$

(iii) $\{N_2(t), t \geq 0\}$ · # αντικ. λόγω ηλικίας στο $(0, t]$

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ RP

μακροπρ. ρυθμός αντικ. λόγω ηλικίας $= \lim_{t \to \infty} \frac{N_2(t)}{t} = \frac{1}{EX_2}$, μ.π.1

όπου X_2 χρόνος μεταξύ 2 αντικ. λόγω ηλικίας

$$E(X_2) = E(X_2 | L < 3) P(L < 3) + E(X_2 | L \geq 3) P(L \geq 3)$$

$$= (2{,}5 + EX_2) \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow E(X_2) = \frac{17}{4}.$$

Οπότε, $\lim_{t \to \infty} \frac{N_2(t)}{t} = \frac{4}{17}$, a.s.