6ο ΜΑΘΗΜΑ

9/3/2021

## 2. Ανανεωτικές Διαδικασίες

### 2.1 Ορισμός, Παραδείγματα

Ορισμός (Ανανεωτική Διαδικασία)

Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ με ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων γεγονότων $\{X_n, n \geq 0\}$ και ακολουθία χρόνων γεγονότων $\{S_n, n \geq 0\}$ είναι ανανεωτική αν η ακολουθία $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. Επίσης, η $\{S_n, n \geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία.

π.χ. 1

Αν $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι $PP(\lambda)$ τότε είναι ανανεωτική διαδικασία διότι οι $X_n, n \geq 0$ είναι ανεξ. και ισόνομες τ.μ. $X_n \sim Exp(\lambda)$, $n \geq 0$

__π.χ 2__ (G/M/1 σύστημα εξυπ.)

G/M/1 ουρά ($\infty$ χωρητικότητα) FCFS

↳ Χρ. εξυπ. $X_n \sim Exp(\mu)$, $n \geq 1$

↳ ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης $A_n \sim G$, $n \geq 1$ και ανεξ.

__Διαδικασίες__

$A(t)$: # πελατών που φτάνουν στο σύστημα στο $(0,t]$

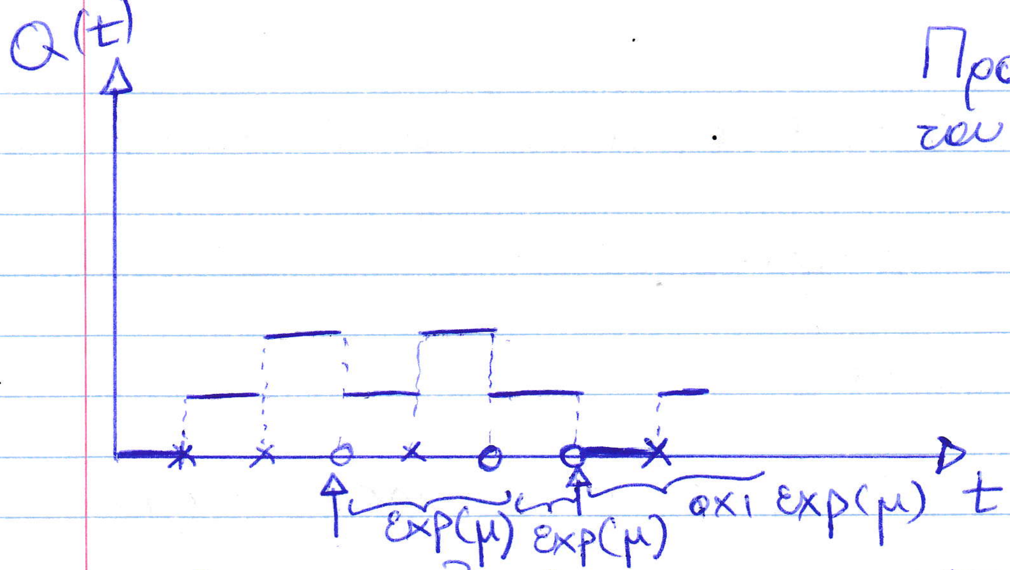
$D(t)$: # πελατών που εξυπηρετήθηκαν στο $(0,t]$

$Q(t)$: # πελατών στο συσ. τη στιγμή $t$

$A_k^-(t)$: # πελατών που αφικνώνται στο συσ. στο $(0,t]$ και βρίσκουν $k$-πελάτες κατά την άφιξή τους

$D_k^+(t)$: # πελατών που αναχωρούν στο $(0,t]$ και αφήνουν κατά την αναχώρησή τους $k$ πελ. στο συσ.

Πραγματοποίηση του συσ.




Η $\underline{\{A(t), t \geq 0\}}$ είναι απαριθμήτρια (μετρά αφίξεις)

θέλω ανεξ. κ' ισ. ενδ. χρ. δηλ. οι χρόνοι που τρέχουν να μην εξαρτ. από το παρελθόν, η εξέλιξη μετά από κάθε γεγονός να είναι η ίδια.

Οι ενδ. χρόνοι γεγ. είναι ανεξ. ισον. τ.μ. $\sim G$ άρα είναι και ανανεωτική.

Η $\underline{\{D(t), t \geq 0\}}$ είναι απαρ. αλλά όχι ανανε.

γιατί οι ενδ. χρόνοι ανανέωσης δεν είναι πάντα Exp(μ) εξαρτάται από την κατάσταση του συσ.

Η $\underline{\{Q(t), t \geq 0\}}$ δεν είναι απαριθμήτρια διότι μετρά το # πελ. στο συσ. όχι γεγονότα.

Η $\{A_k^-(t), t \geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια.

Για $k=1$: $\{A_1^-(t), t \geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια

Αφού φτάσει 1 πελ. και βρει 1 πελ. στο συσ. τρέχουν οι χρ. εξυπ. + άφιξης.

- Χρόνος μέχρι επόμενη άφιξη $\sim G$
- Χρόνος υπολ. εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$ (αμνήμ.)

Αυτοί οι χρόνοι δεν εξαρτ. από πριν γεγονότα (παρελθόν).

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων είναι ανεξ. και ισόνομοι.

Άρα, είναι ανανεωτική αν υποθέσω ότι τη στιγμή 0 έχω άφιξη πελ. που βρίσκει 1 πελ. στο συσ.

Η $\{D_k^+(t), t\geq 0\}$ είναι απαριθμήτρια

Για $k=1$ : $\{D_1^+(t), t\geq 0\}$

Έστω αναχώρηση που αφήνει 1 πελάτη στο σύστημα. Οι χρόνοι που τρέχουν είναι:

- Ο χρόνος μέχρι την επόμενη εξυπηρέτηση $\sim Exp(\mu)$
- Ο υπολ. χρόνος άφιξης, εξαρτάται από το παρελθόν

Άρα δεν έχουμε ανεξ. ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων.

Όχι ανανεωτική

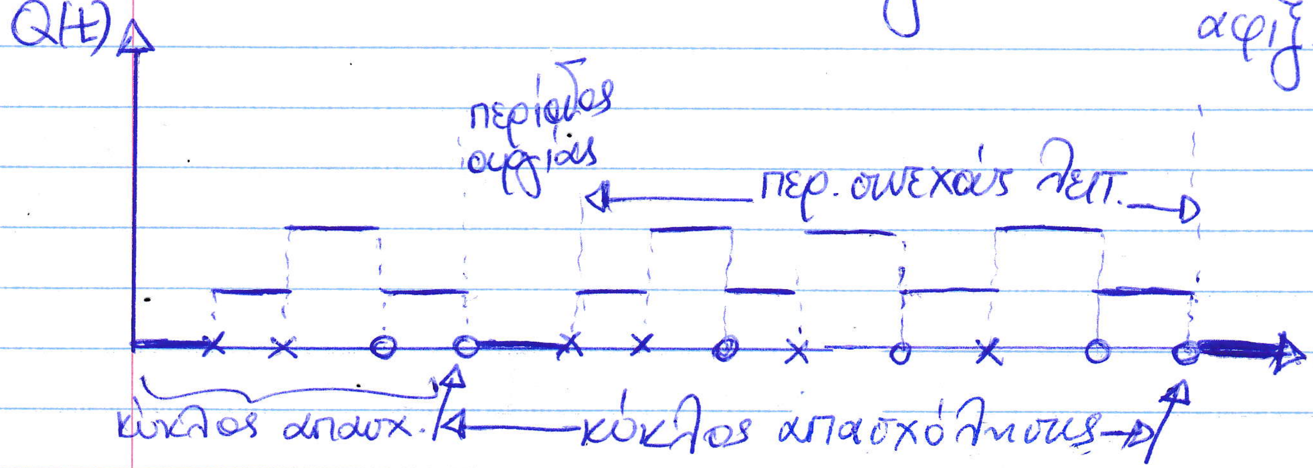
Για τον έλεγχο αν μία σ.δ. είναι ανανε. κοιτάμε τους επόμενους χρόνους που τρέχουν αν είναι ανεξ. από το παρελθόν και αυτό επηρεάζει τα επόμενα γεγονότα

## π.χ. 3 (M|G|1 ουρά)

M|G|1

→ χρ. εξυπ. ανεξ. $X_n \sim G, n \geq 1$

→ ενδ. χρ. αφίξεων $A_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξ. $\Big\} \to PP(\lambda)$ διαδ. αφιξ.




$Z_n$: χρόνος n-οστού κύκλου απασχόλησης

$\{N_Z(t) : t \geq 0\}$

$N_Z(t)$: # κύκλων απασχόλησης στο $(0,t]$

Η $\{N_Z(t), t \geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδ.

γιατί οι ενδ. χρόνοι $\{Z_n, n \geq 1\}$ είναι

ανεξ. και ισόνομοι

π.χ. 4 (Αντικατάσταση Μηχανής)

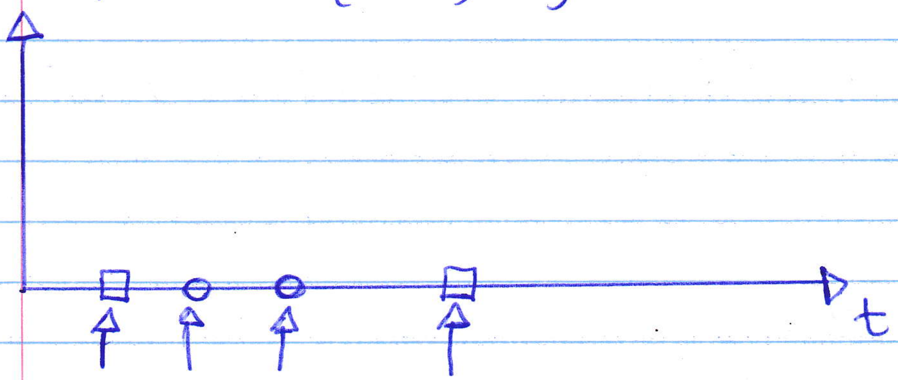
Τη στιγμή 0 έχουμε νέα μηχανή.

Πολιτική αντικατάστασης: Αλλάζουμε τη μηχανή μόλις χαλάσει ή φτάσει σε ηλικία $T$ όπου $T$ σταθερά.

$L_i$: χρόνος ζωής της $i$-οστής μηχανής

$X_i$: ενδιάμεσος χρόνος αντικατάστασης μεταξύ $(i-1)$-οστής και $i$-οστής

$X_i = \min\{L_i, T\}$




$\{N_1(t), t \geq 0\}$, $N_1(t)$: # αντικ. στο $(0,t]$

$\{N_2(t), t \geq 0\}$, $N_2(t)$: # αντικ. λόγω βλάβης στο $(0,t]$

$\{N_3(t), t \geq 0\}$ $N_3(t)$: # αντικ. λόγω ηλικίας στο $(0,t]$.

Αφού αντικ. μία μηχανή τρέχει

$X_i$ χρόνος έως ότου αντικ. η επόμενη.

άρα $\{N_1(t), t \geq 0\}$ αναν. με ενδ. χρ.

$\{X_i, i \geq 1\}$.

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική σ.δ.

$\{N_3(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική σ.δ.

<u>Θεώρημα</u>

renewal process

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP με ακ. ενδ. χρόνων

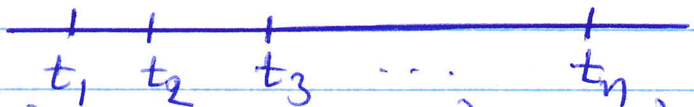
$\{X_n, n \geq 1\}$ όπου $X_n$ έχει σ.κ. $G$

Τότε, η $\{N(t), t \geq 0\}$ χαρακτηρίζεται

από την $G$.

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ τότε



$P(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n) =$

$P(S_{k_1} \leq t_1, S_{k_1+1} > t_1, S_{k_2} \leq t_2, S_{k_2+1} > t_2, \dots,$

$S_{k_n} \leq t_n, S_{k_n+1} > t_n) =$

Όμως,

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ άρα η κατανομή της $S_n$ προσδιορίζεται μέσω της $G$, οπότε και η ζητούμενη πιθανότητα προσδιορίζεται μέσω της $G$.

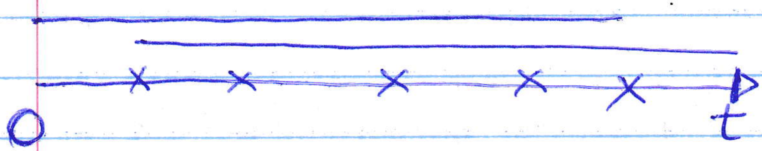
<u>Θεώρημα</u>

$\{N(t), t \geq 0\}$ RP με ακολουθία ενδ. χρόνων $\{X_n, n \geq 1\}$

# γεγ. στο $(0,t]$

<u>Τότε</u>, η $\{N(t), t \geq 0\}$ και η $\{N(t+X_1)-1, t \geq 0\}$ είναι στοχαστικά ίσες.

# γεγ. που έχουν γίνει $t$-χρονικές στιγμές μετά το $1^{ο}$ γεγ. αφαιρώντας $1^{ο}$ γεγ.



Ερμηνεία: Κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός στην ανανεωτική διαδ. αυτή ξεκινά από την αρχή, δηλ. ανανεώνεται

## Απόδειξη

αρκεί νδο $\forall n \geq 1$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ και

ακέραιους $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ ισχύει

$P(N(t_1)=k_1, N(t_2)=k_2, \dots, N(t_n)=k_n) =$

$= P(N(t_1+X_1)-1=k_1, N(t_2+X_1)-1=k_2, \dots,$

$N(t_n+X_1)-1=k_n)$

Έχουμε

$P(N(t_1+X_1)-1=k_1, N(t_2+X_1)-1=k_2, \dots,$

$N(t_n+X_1)-1=k_n) =$

$P(N(t_1+X_1)=k_1+1, N(t_2+X_1)=k_2+1, \dots,$

$N(t_n+X_1)=k_n+1) =$

$P(S_{k_1+1} \leq t_1+X_1, S_{k_1+2} > t_1+X_1, S_{k_2+1} \leq t_2+X_1,$

$S_{k_2+2} > t_2+X_1, \dots, S_{k_n+1} \leq t_n+X_2, S_{k_n+2} > t_n+X_2$

$= P(S_{k_1+1}-X_1 \leq t_1, S_{k_1+2}-X_1 > t_1, S_{k_2+1}-X_1 \leq t_2,$

$S_{k_2+2}-X_1 > t_2, \dots, S_{k_n+1}-X_1 \leq t_n, S_{k_n+2}-X_1 > t_n)$

$$= P\big(\underbrace{S_{k_1} \leq t_1, S_{k_1+1} > t_1}, S_{k_2} \leq t_2, S_{k_2+1} > t_2, \dots, S_{k_n} \leq 1, S_{k_n+1} > t_n\big)$$

$$= P\big(N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n\big)$$