5ο ΜΑΘΗΜΑ

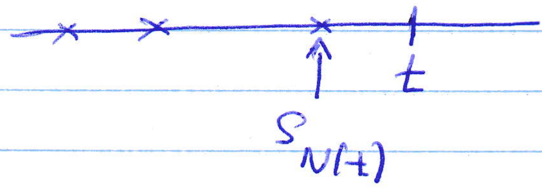
4-3-2021.

Εφαρμογή 1 - Θ. Campbell

$\{N(t), t \geq 0\}$ PP(λ)

$E[\underbrace{S_{N(t)}}] = ;$

χρόνος του
τελ. γεγ. πριν
τη στιγμή t.



Λύση:

$$E[S_{N(t)}] = E\big[E[S_{N(t)} \mid N(t)=n]\big] =$$

$$= \sum_{n \geq 0} E[S_{N(t)} \mid N(t)=n]\, P(N(t)=n)$$

$\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ διατ. ομοιομ. στο $[0,t]$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[S_n \mid N(t)=n]\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\overset{\text{Θ. Campbell}}{=} \sum_{n \geq 0} E[\tilde{u}_n]\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\left(E\tilde{u}_k = \frac{k \cdot t}{n+1}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{n \cdot t}{n+1}\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 0}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{(\lambda t)^{n+1}}{n!}e^{-\lambda t}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{n!}-\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda t\underbrace{\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n}}{n!}}_{1}-\underbrace{\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{1-e^{-\lambda t}}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\lambda t-(1-e^{-\lambda t})\right)$$

$$=t-\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t})$$

Εφαρμογή 2 - Θ. Campbell

- Επιβάτες φθάνουν σε σταθμό λεωφορείου σύμφωνα με PP(λ) $\{N(t), t\geq 0\}$
- Τα λεωφορεία φεύγουν ανά T χρονικές μονάδες και έχουν άπειρη χωρητικότ.
- W_i: ο χρόνος αναμονής του i-επιβάτη
- Έστω ότι τη στιγμή 0 το λεωφ. έχει μόλις αναχωρήσει
- Ο αριθμός επιβατών που θα φτάσουν μέχρι να έρθει το επόμενο λεωφ. είναι $N(T)$.

• Ο πελάτης i φτάνει τη στιγμή S_i και περιμένει $T-S_i$

• Αν $\overline{W} = \frac{1}{N(T)} \sum_{i=1}^{N(T)} (T-S_i)$ Μέσος Χρόνος Αναμονής Πελ. έως ότου φτάσει το λεωφορείο.

Να βρεθεί $E[\overline{W} \mid N(T)=n] = ?$, $n=1,2,\dots$

<u>Λύση:</u>

$$E[\overline{W} \mid N(T)=n] = E\left[\frac{1}{N(T)} \sum_{i=1}^{N(T)} (T-S_i) \,\middle|\, N(T)=n\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (T-S_i) \,\middle|\, N(T)=n\right]$$

λόγω του S_i δεν διώχνω τη δέσμευση

$$= E\left[\frac{1}{n}\left(nT - \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} S_i}\right) \,\middle|\, N(T)=n\right]$$

$$= E\left[T - \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{U}_i}\right]$$ όπου $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n)$ είναι οι διατεταγμένες των ανεξ. ομοιομ. στο $[0,t]$.

Ίδιο Αποτέλεσμα $\rightarrow \sum_{i=1}^{n} U_i$

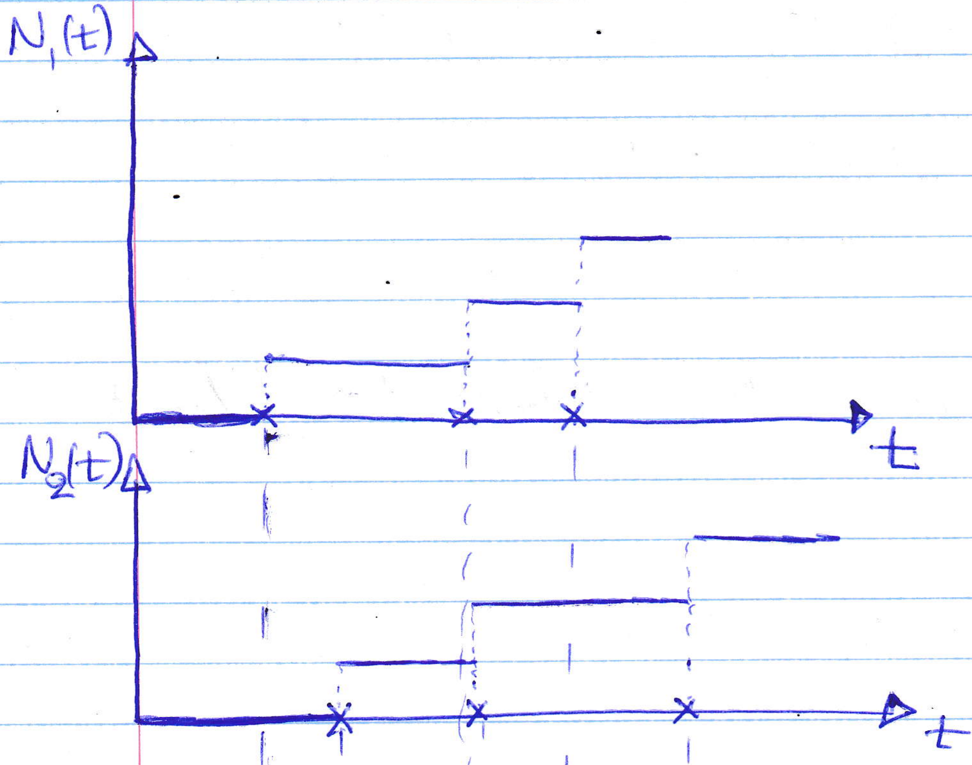
$$= E\left[T - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i\right] = T - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E U_i}_{\frac{T}{2}} = T - \frac{1}{n} \cdot n\frac{T}{2}$$

$= T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$ Μέσος Χρόνος Αναμονής

▽ Χρησιμ. το Θ. Campbell κ' $\sum_i \tilde{U}_i = \sum_i U_i$ στην απόδειξη.

1.4 Σύνθεση – Εκλέπτυνση Poisson

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_1)$

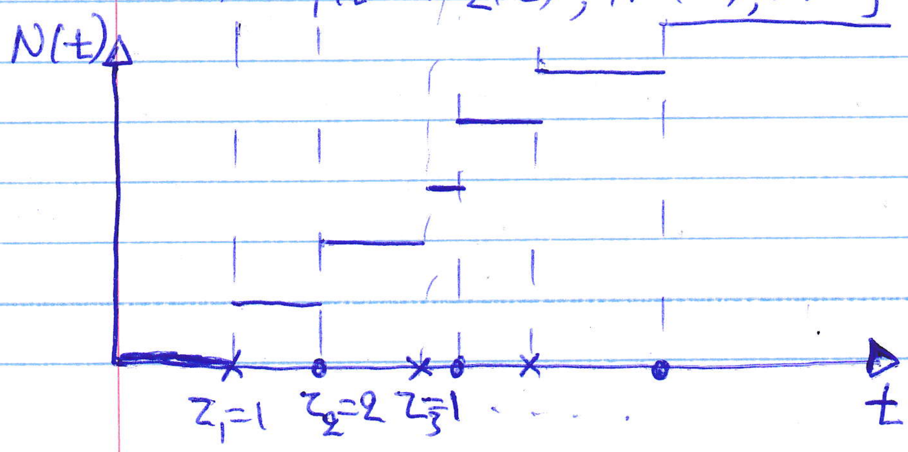


$\{N_1(t), t \geq 0\}$

$\{N_2(t), t \geq 0\}$

ανεξ.

$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$, $\{N(t), t \geq 0\}$ Σύνθεση των $\{N_1(t), t\}$ $\{N_2(t), t\}$



$\{Z_n : n \in \mathbb{N}^*\}$

$$Z_n = \begin{cases} 1, & \text{αν το n-γεγ. της } \{N(t): t \geq 0\} \text{ προήλθε από την } \{N_1(t): t \geq 0\} \\ 2, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

<u>Θεώρημα:</u>

$\{N_i(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$

$\{N_i(t), t \geq 0\}$, $i = 1, \ldots, r$ ανεξ.

$\{N(t), t \geq 0\}$ η σύνθεση των $\{N_i(t), t \geq 0\}$

δηλ. $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \ldots + N_r(t)$

<u>Τότε</u>

$\{N(t): t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$ με $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r$

Για νδο $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$ με

$N_i(t) \sim Poisson(\lambda_i t)$ χρησιμ. πιθανογεν.

(Αναμένεται η απόδειξη)

Θεώρημα

$\{N_i(t): t \geq 0\}$ $PP(\lambda_i)$, $i=1,\dots,r$

$\{N_i(t): t \geq 0\}$ $i=1,\dots,r$ ανεξ.

$\{N(t), t \geq 0\}$ η σύνθεση τους

$Z_n =$ τύπο n-γεγονότος της $\{N(t): t \geq 0\}$

$\Longrightarrow$

$\{Z_n : n \geq 1\}$ ακολουθία ανεξ. και ισόνομων τ.μ.

$$P(Z_n = i) = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad , i=1,2,\dots,r$$

πιθ. n-γεγ. να είναι τύπου i

Μέσα σε μία χρ. μονάδα από την

N_1 γίνονται λ_1-γεγ.
N_2 // λ_2-γεγ.
⋮
N_r // λ_r-γεγ

από αυτά γεγ. τύπου i είναι μ.π. $\frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i}$

Απόδειξη:

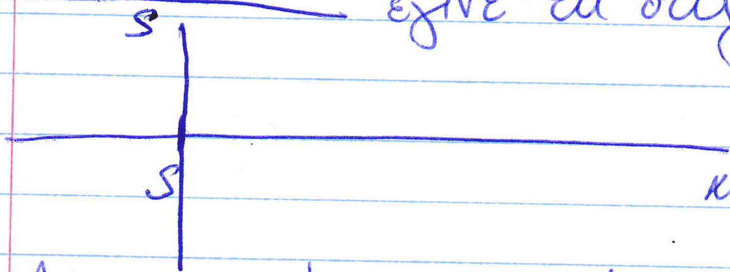
Για την Z_1: Έστω $X_n^{(i)}$: ο χρόνος μεταξύ $(n-1)$-οστού και n-οστού γεγ. στη διαδικασία $\{N_i(t): t\geq 0\}$

$X_1^{(i)}$: χρόνος $1^{ου}$ γεγ. στην $\{N_i(t): t\geq 0\}$

$$P(Z_1=i)=P\left(X_1^{(i)}=\min\{X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(r)}\}\right)$$
$$=\frac{\lambda_i}{\lambda}$$

$X_i \sim Exp(\lambda_i)$

Για την Z_2: Υποθέτουμε ότι το $1^{ο}$ γεγονός έγινε τη στιγμή s



Οι χρόνοι μηδενίζουν και ξεκινούν από την αρχή.

Λόγω αμνήμονος ιδιότητας θεωρούμε ότι οι διαδικασίες ξεκινούν από την αρχή τη στιγμή s.

$$P(Z_2=i)=P\left(X_1^{(i)}=\min(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_r^{(i)})\right)=$$
$$=\frac{\lambda_i}{\lambda}$$

Τελικά, $P(Z_n=i)=\frac{\lambda_i}{\lambda}$, $n=1,2,\ldots$

<u>παράδειγμα</u>:

Σε μία τράπεζα φθάνουν 3 τύποι πελατών

Τύπος 1: μόνο κατάθεση
φθάνουν με PP(20)
η εξυπηρέτηση τους διαρκεί 3'

Τύπος 2: θέλουν μόνο ανάληψη
φθάνουν με PP(15)
η εξυπ. διαρκεί 4'

Τύπος 3: θέλουν κατάθεση + ανάληψη
φθάνουν με PP(10)
η εξυπ. διαρκεί 6'

Μέσος Χρόνος Εξυπηρέτησης $= E(X)$

<u>Λύση</u> (Μέσος Χρ. εξυπ. εξαρτ. από τον τύπο των πελατών)

$E(X)$

Έστω Z ο τύπος του πελάτη

$$P(Z=1)=\frac{20}{20+15+10}=\frac{20}{45}$$

$P(Z=2)=\frac{15}{45}$ $P(Z=3)=\frac{10}{45}$

$$E[X] = E[E[X|Z]] = \sum_{i=1}^{3} E(X|Z=i)P(Z=i)$$

$$= E(X|Z=1)P(Z=1) + E(X|Z=2)P(Z=2)$$

$$+ E(X|Z=3)P(Z=3)$$

$$= 3 \cdot \frac{20}{45} + 4 \cdot \frac{15}{45} + 6 \cdot \frac{10}{45} = 4'$$

Εκλέπτυνση - Διαχωρισμός Διαδ. Poisson

Μηχανισμός Διαχωρισμού Bernoulli

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδ. Poisson και κάθε γεγονός της χαρακτηρίζεται ως τύπου i, $i=1,2,\dots,r$ μ.π. P_i $\left(\sum_{i=1}^{r} P_i = 1\right)$, ανεξ. από τα υπόλοιπα γεγονότα

Αν $N_i(t) = \#$ γεγονότων τύπου i στο $(0,t]$ λέμε ότι η αρχική διαδ. $\{N(t), t \geq 0\}$ διαχωρίστηκε στις $\{N_i(t) : t \geq 0\}$.

Επίσης κάθε μία από τις $\{N_i(t) : t \geq 0\}$ αποτελεί μία εκλέπτυνση της αρχικής.

Προφανώς, $N(t) = N_1(t) + \dots + N_r(t)$, $t \geq 0$

! Κάθε μία παίρνει χαρακτηρισμό ανεξ. από τις άλλες με δική της πιθανότητα να χαρακτηριστεί έτσι

<u>Θεώρημα</u> (για διαχωρισμό Bernoulli)

$\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$

$\{N_i(t), t \geq 0\}$, $i=1, \ldots, r$ οι διαδ. που προκύπτουν με διαχωρισμό Bernoulli

μ.π. $[p_1, \ldots, p_r]$

$\Rightarrow$ $\{N_i(t), t \geq 0\}$ είναι $PP(\lambda p_i)$, $i=1, \ldots, r$

$\{N_i(t), t \geq 0\}$ ανεξ. $i=1, \ldots, r$

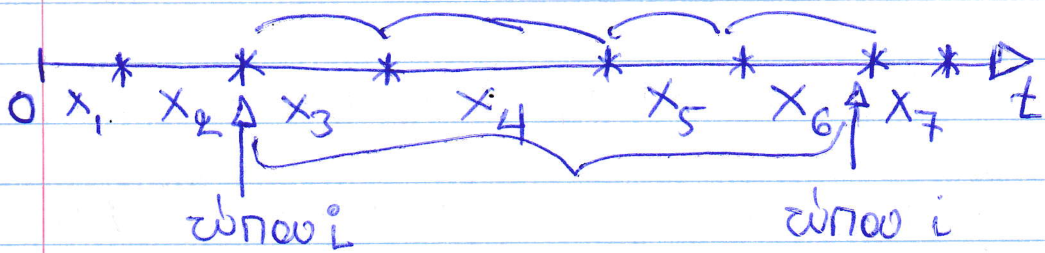
<u>Απόδειξη</u>:

Θδο η $\{N_i(t), t \geq 0\}$ είναι $PP(\lambda p_i)$

αρκεί νδο οι ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων είναι εκθετικοί $Exp(\lambda p_i)$ και ανεξ.

Έστω $\{X_n \mid n \geq 1\}$ η ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων της $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ δηλ. $X_n \sim Exp(\lambda)$

Έστω $\{Y_n, n \geq 1\}$ η ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων της $\{N_i(t), t \geq 0\}$



$$Y_n = \sum_{i=1}^{R} X_i$$

$$\left.\begin{array}{l} P(R=1) = P_i \\ P(R=2) = (1-P_i)\,P_i \\ P(R=3) = (1-P_i)^2\,P_i \end{array}\right\} \Rightarrow R \sim Geom(P_i)$$

$Y_n \sim Exp(\lambda P_i)$ (αθρ. τυχαίων Εκθετικών πλήθους $\sim$ Geom

Άρα, $\{Y_n, n \geq 1\}$ ακολουθία ανεξ. εκθετικών τ.μ. με παράμετρο λP_i

$\Rightarrow \{N_i(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda P_i)$

Τώρα ΘΔΟ $\{N_i(t): t\geq 0\}$, $i=1,\dots,r$ ανεξ.

Το δείχνω για $r=2$

(επειδή είναι ομογ. + ανεξ. Poisson)

αρκεί ΝΔΟ $P(N_1(t)=i, N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i)P(N_2(t)=j)$

$$P(N_1(t)=i, N_2(t)=j) = P(N_1(t)=i, N_2(t)=j, N(t)=i+j)$$

$$\overset{(*)}{=} \underbrace{P(N_1(t)=i, N_2(t)=j \mid N(t)=i+j)}_{} P(N(t)=i+j)$$

$(N_1(t)|N(t)=i+j) \sim Bin(i+j, p_1)$

$$= \binom{i+j}{i} p_1^i p_2^j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i+j}}{(i+j)!}$$

$$= \frac{\cancel{(i+j)!}}{i!\,j!} p_1^i p_2^j e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{i+j}}{\cancel{(i+j)!}}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p_1 t)^i}{i!} \frac{(\lambda p_2 t)^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda p_1 t} \frac{(\lambda p_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda p_2 t} \frac{(\lambda p_2 t)^j}{j!}$$

$$= P(N_1(t)=i)\, P(N_2(t)=j)$$

(*) ένα γεγ. το χαρακτηρίζω i μ.π. P_1 και ένα άλλο χαρακτ. ως j με τη συμπληρωματική πιθ.