24ο ΜΑΘΗΜΑ

3/6/21

Άσκηση 1

Ένα κελί περιέχει ένα λευκό και ένα μαύρο σφαιρίδιο. Σε κάθε βήμα ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από το κελί και επανατοποθετείται μαζί με άλλο ένα σφαιρίδιο ίδιου χρώματος.

Έστω Z_n το ποσοστό των λευκών σφαιριδίων μετά την n-οστή επανάληψη. Νδο η $\{Z_n, n \geq 0\}$ είναι martingale (ως προς τον εαυτό της)

Λύση

Το κελί αρχικά έχει 2 σφαιρίδια
Μετά το 1ο βήμα θα έχει 3 σφαιρίδια

Μετά το nο βήμα θα έχει n+2 σφαιρίδια

Αν $Z_n = i$, τότε υπάρχουν $i(n+2)$ λευκά σφαιρίδια στο κελί.

$$Z_{n+1} \mid Z_n = i = \begin{cases} \dfrac{i(n+2)+1}{n+3}, & \text{μ.π. } i \text{ (αν διαλέξω λευκό)} \\[2ex] \dfrac{i(n+2)}{n+3}, & \text{μ.π. } 1-i \text{ (αν διαλέξω μαύρο} \end{cases}$$

θδο $\{Z_n, n\geq 0\}$ είναι martingale

i) $E[|Z_n|] < \infty$, αφού $Z_n \in (0,1)$, $\forall n=0,1,\ldots$

ii) $E[Z_{n+1}|Z_0,\ldots,Z_n] \overset{\text{Μαρκ.}}{=} E[Z_{n+1}|Z_n]$

$$E[Z_{n+1}|Z_n=i] = \frac{i(n+2)+1}{n+3}\cdot i + \frac{i(n+2)}{n+3}(1-i)$$

$$= \frac{i(n+2)}{n+3}(i+1-i) + \frac{i}{n+3} = \frac{i(n+2)+i}{n+3} = \frac{i\,\cancel{(n+2+1)}}{\cancel{n+3}} = i$$

Οπότε, $E[Z_{n+1}/Z_0,\ldots,Z_n] = E[Z_{n+1}/Z_n] = Z_n$

iii) Η Z_{n+1} εξαρτάται από την Z_n άρα είναι ΜΑΔΧ (προφ.)

Οπότε, $\{Z_n, n\geq 0\}$ είναι martingale

Άσκηση 2

Θεωρούμε μία κλαδωτή διαδικασία με μετανάστευση $\{W_n, n\geq 0\}$ δηλ. W_n είναι το μέγεθος του πληθυσμού στην αρχή της γενιάς σ' ένα μοντέλο ανάπτυξης πληθυσμού που εξελίσσεται ως

$$W_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^{W_n} X_{n,i}, \quad n\geq 0$$

όπου η Y_n αντιστοιχεί στη μετανάστευση κατά τη γενιά n και $X_{n,i}$ είναι ο αριθμός των απογόνων του ατόμου i στη γενιά n, $i=1,\ldots,W_n$

Θεωρούμε ότι Y_n και $X_{n,i}$, $i=1,\dots,W_n$ είναι ανεξάρτητες και $E(Y_n)=\lambda$, $E(X_{n,i})=m\neq 1$

Νδο η $\{Z_n, n\geq 0\}$ με $Z_n = m^{-n}\left(W_n - \lambda\frac{1-m^n}{1-m}\right)$

είναι martingale ως προς $\{W_n, n\geq 0\}$

Λύση:

(i) $E[|Z_n|] = E\left[\left|m^{-n}\left(W_n - \lambda\frac{1-m^n}{1-m}\right)\right|\right] \leq$

$m^{-n}E[|W_n|] + m^{-n}E\left[\left|\lambda\frac{1-m^n}{1-m}\right|\right] =$

$m^{-n}E[W_n] + m^{-n}\lambda\frac{1-m^n}{1-m}$

Για να έχω $E[|Z_n|]<\infty$ αρκεί νδο

$E[W_n]<\infty$

Έχουμε $E(W_0)=0$

Έστω $E(W_k)<\infty$ θδο $E(W_{k+1})<\infty$

$$E(W_{k+1}) = E\left(Y_k + \sum_{i=1}^{W_k} X_{k,i}\right) = E(Y_k) + E\left(\sum_{i=1}^{W_k} X_{k,i}\right)$$

$$= \lambda + E(W_k)\cdot m < \infty$$

ii) $E(Z_{n+1} | W_0, W_1, \dots, W_n) \left(\underbrace{= Z_n = m^{-n}\left(W_n - \lambda \frac{1-m^n}{1-m}\right)}_{\text{θέλουμε να το δείξουμε}} \right)$

$\|$

$E\left[m^{-(n+1)}\left(W_{n+1} - \lambda \frac{1-m^{+(n+1)}}{1-m}\right) \Big| W_0, \dots, W_n\right] =$

$E\left[m^{-(n+1)}\left(W_{n+1} - \lambda \frac{1-m^{n+1}}{1-m}\right) \Big| W_n\right] =$

$m^{-(n+1)}\left\{E[W_{n+1} | W_n] - \lambda \frac{1-m^{n+1}}{1-m}\right\}$

θέλω να υπολογίσω την

$E[W_{n+1} | W_n] = E\left[Y_n + \sum_{i=1}^{W_n} X_{n,i} \Big| W_n = k\right] =$

$E\left[Y_n + \sum_{i=1}^{k} X_{n,i}\right] = \lambda + k \cdot m$

αρα, $E(W_{n+1} | W_n) = \lambda + W_n \cdot m$

Οπότε, $E(Z_{n+1} | W_0, \dots, W_n) = m^{-(n+1)}\left(\lambda + mW_n - \lambda \frac{1-m^{n+1}}{1-m}\right)$

$= \lambda m^{-(n+1)} + m^{-n} W_n - \frac{\lambda m^{-(n+1)}}{1-m} + \frac{\lambda}{1-m}$

$= m^{-n} W_n - \lambda \frac{m^{-(n+1)} - 1 - m^{-(n+1)}(1-m)}{1-m}$

$$= m^{-n} W_n - \lambda m^{-n} \frac{1-m^n}{1-m}$$

$$= m^{-n}\left(W_n - \lambda \frac{1-m^n}{1-m}\right)$$

$$= Z_n$$

iii) Z_n είναι συνάρτηση του W_n
άρα Z_n martingale ως προς W_n

<u>Άσκηση 3 (Το πρόβλημα του ταιριάσματος)</u>

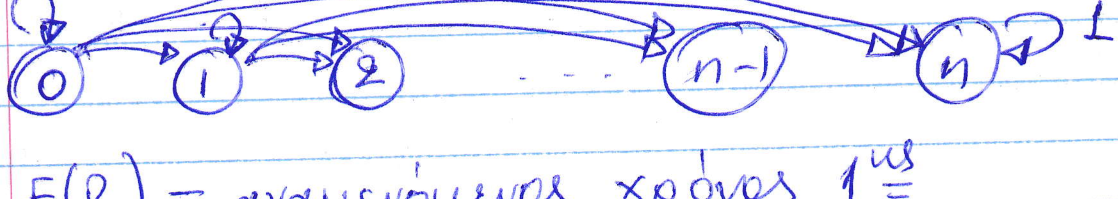
Έχουμε n ζεύγη αντικ. (π.χ. φάκελα-γράμματα)
Σε κάθε γύρο γίνεται τυχαία αντιστοιχία και αν κάποιος βρει το ταίρι φεύγει από το παιχνίδι.

R = # γύρων ώστε να φύγουν όλα τα ζεύγη

$E(R) = ;$

<u>Λύση:</u>

Y_ℓ = # των ταιριασμάτων μετά τον ℓ-οστό γύρο



$E(R)$ = αναμενόμενος χρόνος $1^{ης}$ εισόδου στο n, ξεκινώντας από το 0

$E(R) < \infty$

Το R είναι χρόνος Markov αν γνωρίζουμε τα ενδεχόμενα της τ.μ. Y_e ή ως προς τη Z_i

Έστω Z_i το πλήθος ταιριασμάτων στον i-γύρο τότε R είναι Markov time ως προς Z_i αφού $\{R=k\}$ εξαρτάται από τις

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{n} I_j^{(n)} \quad \text{όπου} \quad I_j^{(n)} = \begin{cases} 1, & j\text{-φάκελος πήρε το γράμμα} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad j=1,\ldots,n$$

$$E(I_j^{(n)}) = 1\,P(I_j^{(n)}=1) + 0 \cdot P(I_j^{(n)}=0) = \frac{1}{n}$$

άρα $E(Z_1) = \sum_{j=1}^{n} E(I_j^{(n)}) = n\frac{1}{n} = 1$

Αν $k \neq n$

$$E(Z_2 \mid Z_1 = k) = E\left(\sum_{j=1}^{n-k} I_j^{(n-k)} \,\middle|\, Z_1 = k\right) =$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{n-k} I_j^{(n-k)}\right) = \sum_{j=1}^{n-k} E(I_j^{(n-k)}) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{n-k}$$

$$= (n-k)\frac{1}{n-k} = 1$$

Γενικά, αν $k_1 + k_2 + \ldots + k_{i-1} < n$

$$E(Z_i \mid Z_1 = k_1, Z_2 = k_2, \ldots, Z_{i-1} = k_{i-1}) = 1$$

Γνωρίζουμε ότι η $\{X_\ell \mid \ell \geq 1\}$ με

$$X_\ell = \sum_{i=1}^{\ell}\left(Z_i - E(Z_i \mid Z_1, \ldots, Z_{i-1})\right)$$ είναι

martingale ως προς $\{Z_i, i \geq 1\}$

$$X_\ell = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell}(Z_i - 1), & \ell \leq R \\ n - R, & \ell > R \end{cases}$$

Αν Θ.Ο. ισχύουν οι συνθήκες θα έχω

$E(X_R) = E(X_1) \Rightarrow$

$E\left[\sum_{i=1}^{R} Z_i\right] - E(R) = E(Z_1) - E(Z_1) = 0 \Rightarrow$

$n - E(R) = 0 \Rightarrow E(R) = n$

Έχουμε ότι $E(R) < \infty$

ΘΔΟ $\exists\, c : E\left[|X_{\ell+1} - X_\ell| \mid Z_1, \ldots, Z_\ell\right] \leq c, \forall n \geq 1$

Για $\ell = 1, \ldots, R-1$

$E\left[|X_{\ell+1} - X_\ell| \mid Z_1, \ldots, Z_\ell\right] =$

$$E\left[\left|Z_{\ell+1} - \underbrace{E[Z_{\ell+1} \mid Z_1, \ldots, Z_\ell]}_{=1}\right| \mid Z_1, \ldots, Z_\ell\right] =$$

$E\left[|Z_{\ell+1} - 1| \mid Z_1, \ldots, Z_\ell\right] \leq$

$$E[Z_{\ell+1} | Z_1, \dots, Z_\ell] + 1 \leq n+1$$

Για $\ell = R$: $E[|X_{\ell+1} - X_\ell| \,|\, Z_1, \dots, Z_\ell] = 0$