20ο ΜΑΘΗΜΑ

20/5/21

## 4.5 Στάσιμη Κατανομή

**ΟΡΣ** (Στάσιμο μέτρο – Στάσιμη Κατανομή)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. $S$ και π.ρ.μ. $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$. Τότε, ένα διάνυσμα $p = [p_i]_{i \in S}$ λέγεται στάσιμο μέτρο αν

$$p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij} \quad , j \in S \quad (\text{εξ. ισορροπίας})$$

Αν επιπλέον, $\sum_{j \in S} p_j = 1$ (εξ. κανονικοποίησης)

τότε η $p = [p_i]_{i \in S}$ λέγεται στάσιμη κατανομή

**Θεώρημα** (Βασικό Θεώρημα Οριακής Συμπεριφοράς Αδιαχώριστων ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ αδιαχ. ΜΑΣΧ με χ.κ. $S$ και π.ρ.μ. $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$

Τότε, η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική αν έχει στάσιμη κατανομή $p = [p_i]_{i \in S}$.

Ακόμη και αν έχει στάσιμη κατανομή $p = [p_i]_{i \in S}$ τότε είναι μοναδική, και $p_i > 0$, $i \in S$ και αν $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ ένα στάσιμο μέτρο με $\sum_i \lambda_i < \infty$ τότε $\lambda = cp$, $c \in \mathbb{R}$

χρόνος στο $(0,t)$ που έμεινε στην $j$-κατ.

Επιπλέον

i) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{X(u)=j\}\,du}{t} = P_j \,,\ \mu.\pi.\ 1 \,,\ \forall j \in S$$

μακροπρ. ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην $j$

ii) $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{X(u)=j\}\,du\right]}{t} = P_j$$

μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην κατ. $j$

μέσος χρόνος που η αλυσίδα είναι στην $j$

iii) $$P_j = \frac{1/q_j}{m_j} \iff P_j = \frac{1}{q_j m_j}$$

Θεωρούμε ως γεγονότα τις εισόδους στην $j$. Έχουμε ανανεωτική διαδ.

$m_j$ = χρόνος επανόδου στην $j$ = ενδ. χρόνος γεγ

$\frac{1}{q_j}$ = μέσος χρόνος παραμονής στην $j$

$P_j$ = ποσοστό χρόνου που μένει στην $j$

iv) $\displaystyle \text{c-}\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \underbrace{\lim_{t} \frac{\int_0^t p_j(u)\,du}{t}}_{\displaystyle \underbrace{\lim_{t} \int_0^t P(X(u)=j)\frac{1}{t}\,du}_{\displaystyle \underbrace{\lim_{t}\int_0^t P(X(U_t)=j \mid U_t=u)\, f_{U_t}(u)\,du}}} = p_j$

$U_t \sim U[0,t]$
$f_{U_t}(u) = \frac{1}{t}$

πιθ. αν πάρω ένα μεγάλο
χρ. διαστ. και επιλέξω τυχαία
και ομοιομ. στιγμή του διαστήματος
να είναι στην κατ $j$

v) $\displaystyle \lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j \, , \, j\in S$

και
$\displaystyle \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j \, , \, i,j\in S$

vi) Αν $p(0) = p \Rightarrow p(t) = p$

(Αν για αρχική πάρω τη στάσιμη,
η οριακή θα είναι η στάσιμη)

## Ερμηνεία Εξ. Ισορροπίας

$$\underbrace{p_j q_j}_{\sum_{i \neq j} q_{ji}} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij} \iff \underbrace{\sum_{i \neq j} p_j q_{ji}}_{\text{μακρ. ρυθμός εξόδου από την } j} = \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}}_{\text{μακρ. ρυθμός εισόδου στην } j}$$

$p_j$ = μακρ. ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα είναι στην κατ. $j$

$q_{ij}$ = ρυθμός μετ. στην $j$ δεδ. ότι βρίσκομαι στην $i$

$p_j q_{ji}$ = μακρ. ρυθμός μεταβάσεων τύπου $j \to i$

## Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ με χ.κ. $S$ και π.ρ.μ. $Q$. Αν $A \subseteq S$ τότε οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας είναι

$$\underbrace{\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} p_j q_{ji}}_{\text{μακρ. ρυθμός εξόδου από το } A} = \underbrace{\sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} p_i q_{ij}}_{\text{μακρ. ρυθμός εισόδου στο } A}, \quad \forall A \subseteq S$$

## παράδειγμα

- Σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη
- Διαδικασία αφίξεων $PP(\lambda)$
- Χρόνοι εξυπ. $\sim Exp(\mu)$
- Vacation policy:

Όταν ο υπηρέτης αδειάσει παραμένει ανενεργός μέχρι να μπουν N-πελάτες. Όταν μπει ο N-οστός πελ. αρχίζει την εξυπηρέτηση.

α) Να μοντελοποιηθεί σαν ΜΑΕΧ

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι θετικά επαναληπτική και να βρεθεί η στάσιμη.

Λύση

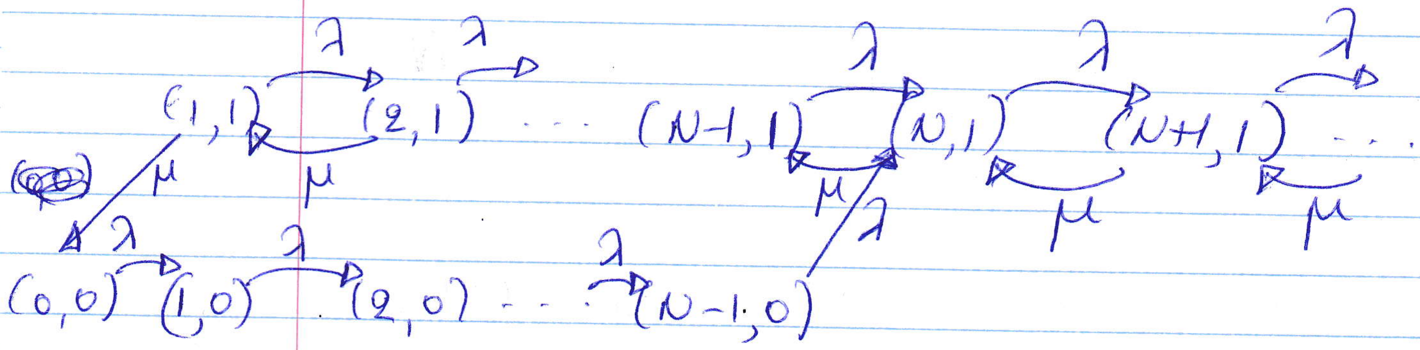
α) $X(t)$: # πελατών στο συσ. τη στιγμή $t$

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν ο υπηρέτης ανενεργός} \\ 1, & \text{αν ο υπηρέτης ενεργός.} \end{cases}$$

$$S = \{(0,0), (1,0), (2,0), \ldots, (N-1,0), (1,1), (2,1), \ldots, (N-1,1), (N,1), (N+1,1), \ldots\}$$

Για νδο είναι ΜΑΕΧ

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης




β) Γράφω τις εξ. ισ.:

$\forall j = N, N+1, \dots$ γράφω εξ. γεν. ισ. με

$A_j = \{(0,0)\} \cup \{(i,0), (i,1), i \in \{1, \dots, N-1\}\} \cup \{(i,1) : i = N, \dots, j\}$

$$\left.\begin{aligned} \lambda P_{N,1} &= \mu P_{N+1,1} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda P_{i-1,1} = \mu P_{i,1}$$

$\forall i = N+1, N+2, \dots$

$$P_{i,1} = \frac{\lambda}{\mu} P_{i-1,1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_{i-2,1} = \dots = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-N} P_{N,1}$$

$$\overset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{\Longrightarrow} P_{i,1} = \rho^{i-N} P_{N,1}, \quad \forall i = N+1, N+2, \dots \quad (1)$$

$\forall\, i=1,2,\dots,N-1$ γράφω εξισώσεις πλήρους ισορροπίας για $(i,0)$

$$\left.\begin{aligned} \lambda P_{1,0} &= \lambda P_{0,0} \\ \lambda P_{2,0} &= \lambda P_{1,0} \\ &\ \vdots \\ \lambda P_{N-1,0} &= \lambda P_{N-2,0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_{0,0} = P_{1,0} = \dots = P_{N-1,0}$$

$$\Downarrow$$

$$P_{i,0} = P_{0,0} \quad (2)$$

$$i = 0,1,\dots,N-1$$

Εξ. πλήρους ισορροπίας για $(0,0),(1,1),\dots,(N-1,1)$:

$$\lambda P_{0,0} = \mu P_{1,1} \Rightarrow P_{1,1} = \rho P_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu)P_{1,1} = \mu P_{2,1} \Rightarrow P_{2,1} = (\rho+1)P_{1,1} = \rho(1+\rho)P_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu)P_{2,1} = \lambda P_{1,1} + \mu P_{3,1} \Rightarrow$$

$$P_{3,1} = (1+\rho)P_{2,1} - \rho P_{1,1} \Rightarrow$$

$$P_{3,1} = (1+\rho)^2 \rho P_{0,0} - \rho^2 P_{0,0}$$

$$P_{3,1} = \rho(1+\rho+\rho^2)P_{0,0}$$

$$(\lambda+\mu)P_{3,1} = \lambda P_{2,1} + \mu P_{4,1} \Rightarrow P_{4,1} = (1+\rho)P_{3,1} - \rho P_{2,1}$$

$$\Rightarrow P_{4,1} = (1+\rho)\rho(1+\rho+\rho^2)P_{00} - \rho\cdot\rho(1+\rho)P_{00}$$

$$\Rightarrow P_{4,1} = \rho(1+\rho+\rho^2+\rho^3)P_{0,0}$$

Γενικά, $P_{i,1} = \rho(1+\rho+\rho^2+\dots+\rho^{i-1})P_{0,0}$ (3)

$i=1,\dots,N$

$$(1) \Rightarrow P_{i,1} = \rho^{i-N} P_{N,1}, \; i=N+1,\dots \xrightarrow[\text{για } i=N]{(3)}$$

$$(4) \quad \boxed{P_{i,1} = \rho^{i-N}\rho(1+\rho+\dots+\rho^{N-1})P_{0,0}, \; i=N+1,\dots}$$

Τελικά

$$P_{i,0} = P_{0,0}, \; i=1,\dots,N-1$$

$$P_{i,1} = \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k P_{00}, \; i=1,\dots,N$$

$$P_{i,1} = \rho^{i-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k P_{00}, \; i=N+1,\dots$$

Εξ. κανον.

$$\sum_{i=0}^{N-1} P_{i,0} + \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,1} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} P_{i,0} + \sum_{i=1}^{N} \rho \sum_{k=0}^{i-1} \rho^k P_{0,0} +$$

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \rho^{i-N+1} \sum_{k=0}^{N-1} \rho^k P_{0,0} = 1$$

$$\Rightarrow P_{0,0}\left(N+\sum_{i=1}^{N}\rho\frac{1-\rho^{i}}{1-\rho}+\sum_{k=0}^{N-1}\rho^{k}\underbrace{\sum_{i=N+1}^{\infty}\rho^{i-N+1}}_{\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i+2}}_{\underbrace{\rho^{2}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}}_{\rho^{2}\frac{1}{1-\rho}}}}\right)=1$$

$$\xRightarrow{\rho<1} P_{0,0}\left(N+\frac{\rho}{1-\rho}\left(\sum_{i=1}^{N}1-\sum_{i=1}^{N}\rho^{i}\right)\right)+\frac{\rho^{2}}{1-\rho}\frac{1-\rho^{N}}{1-\rho}=1$$

$$P_{0,0}\left(N+\frac{\rho}{1-\rho}N-\cancel{\frac{\rho}{1-\rho}\rho\frac{1-\rho^{N}}{1-\rho}}+\cancel{\frac{\rho^{2}}{1-\rho}\frac{1-\rho^{N}}{1-\rho}}\right)=1$$

$$P_{0,0}N\frac{1}{1-\rho}=1\Rightarrow P_{0,0}=\frac{1-\rho}{N}$$

Συνθήκη Ευστάθειας $\rho<1$.

Τελικά η ΜΑΣΧ είναι θετικά επαν. αν $\rho<1$