2ο ΜΑΘΗΜΑ

25/2/2021.

Ισχυρή Αμνήμονη Ιδιότητα

$X \sim Exp(\lambda)$

Για $\forall t, s$ $P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s) = e^{-\lambda s}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Τυχαία μεταβλητή } T \geq 0 \\ X, T \text{ ανεξ.} \\ X \sim Exp(\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X > T+s \mid X > T) = P(X > s) = e^{-\lambda s}$$

Η ερμηνεία παραμένει ίδια επί της ουσίας

Απ:

$$P(X > s+T \mid X > T) = \frac{P(X > s+T, X > T)}{P(X > T)}$$

Δεσμεύουμε ως προς T

$$P(X > s+T, X > T) = \int_0^\infty P(X > s+T, X > T \mid T = t) f_T(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty P(X > s+t, X > t \mid \cancel{T = t}) f_T(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty P(X > s+t) f_T(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda(s+t)} f_T(t)dt$$

$$= e^{-\lambda(s+t)} \int_0^\infty f_T(t)dt$$

συν. επιβίωσης

$$= e^{-\lambda s} \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_T(t)dt}$$

Προβληματικό $\longrightarrow$ Μετ. L-S $\tilde{F}_T(\lambda)$

γιατί δεν ξέρω το λ

$$= e^{-\lambda s} \int_0^\infty P(X>t) f_T(t)dt$$

$$\overset{\circledast}{=} e^{-\lambda s} P(X>T)$$

$\circledast$: $= e^{-\lambda s} \int_0^\infty P(X>T|T=t)\, f_T(t)dt$

$$\tilde{F}_T(\lambda) = E\left[e^{-\lambda T}\right] = P(X>T), \quad X \sim Exp(\lambda)$$

Άρα, $P(X>s+T|X>T) = \dfrac{e^{-\lambda s} P(X>T)}{P(X>T)}$

$$= e^{-\lambda s} = P(X>s)$$

Υπενθύμιση: Κατανομή Erlang(n, λ)

$Z \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lambda > 0$

σππ $f_Z(z) = \begin{cases} 0 & , z < 0 \\ \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} & , z \geq 0 \end{cases}$

σ.κ. $F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} du =$

Κατά παράγοντες ολοκλήρωση $= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda z} \frac{(\lambda z)^k}{k!}$

ή μέσω της σύνδεσης με σ.δ. Poisson

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$, $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, \ldots$

$\tilde{F}_Z(z) = \int_0^\infty e^{-sz} f_Z(z) dz = \int_0^\infty e^{-sz} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} e^{-\lambda z} dz$

$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)z} z^{n-1} dz \quad \underline{\underline{u = (\lambda+s)z}}$

$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda+s}\right)^{n-1} \frac{du}{\lambda+s} = \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n (n-1)!} \underbrace{\int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du}_{\Gamma(n) = (n-1)!}$

$= \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n \cancel{(n-1)!}} \cancel{(n-1)!} = \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

Άθροισμα ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \\ X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξ.} \\ Z = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow Z \sim Erlang(n, \lambda)$$

Απ:

Ο μετ. L-S χαρακτηρίζει την κατανομή.

$$\tilde{F}_Z(s) = E\left[e^{-sZ}\right] = E\left[e^{-s(X_1+\dots+X_n)}\right] =$$

$$= E\left[e^{-sX_1} e^{-sX_2} \dots e^{-sX_n}\right] \underset{\text{ανεξ.}}{\overset{X_1,\dots,X_n}{=}}$$

$$E\left[e^{-sX_1}\right] E\left[e^{-sX_2}\right] \dots E\left[e^{-sX_n}\right]$$

$$= \tilde{F}_{X_1}(s) \tilde{F}_{X_2}(s) \dots \tilde{F}_{X_n}(s)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$$

$$\Rightarrow Z \sim Erlang(n, \lambda)$$

Τυχαίο άθροισμα ανεξ. κ' ισον. Exp

$X_i \sim Exp(\lambda)$, $i=1,\dots$

$N \sim Geom(p)$ (μετρά το # των Exp)

N = # δοκιμών εως την $1^{η}$ επιτυχία

σε πειράματα Bernoulli μ.π. επιτ. p.

$P(N=n) = (1-p)^{n-1} p$, $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$

Τότε από τα παραπάνω

$Z \sim Exp(\lambda p)$

Εκθετικός χρόνος τρέχει $\xrightarrow{μ.π.\ p}$ Σταματώ

$\xrightarrow{μ.π.\ 1-p}$ Ξανακάνω τον εκθετικό χρόνο (επαναλαμβάνεται το μοτίβο)

Αθροισμα εκθετικών εως την $1^{η}$ επιτυχία

Απ:

$$\tilde{F}_Z(s) = E\left[e^{-sZ}\right] = E\left[e^{-s(X_1+X_2+\dots+X_N)}\right] =$$

Δεσμ. ως προς N

N: διακριτό

ΘΔΜΤ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{-s(X_1+\dots+X_N)} \middle| N=n\right] P(N=n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E\left[e^{-s(X_1+\dots+X_n)}\right]}_{\text{Μετ. L-s Erlang}(n,\lambda)} (1-p)^{n-1} \cdot p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n (1-p)^{n-1} p$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}(1-p)\right)^{n-1}$$

$$\overset{n'=n-1}{=} \frac{\lambda p}{\lambda+s} \sum_{n'=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda(1-p)}{\lambda+s}\right)^{n'}$$

$$= \frac{\lambda p}{\lambda+s} \frac{1}{1-\frac{\lambda(1-p)}{\lambda+s}} = \frac{\lambda p}{\cancel{(\lambda+s)} \frac{\lambda+s-\lambda+\lambda p}{\cancel{\lambda+s}}}$$

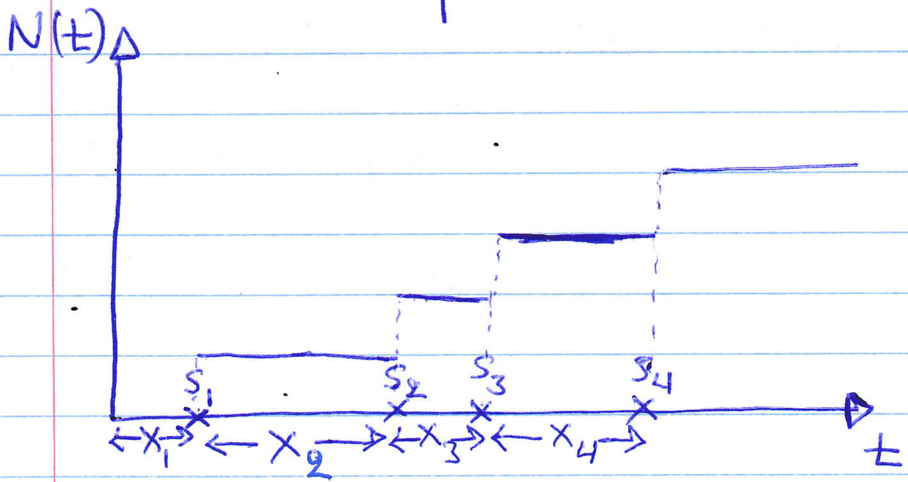
$$= \frac{\lambda p}{\lambda p+s} \Rightarrow Z \sim \mathcal{E}xp(\lambda p)$$

Θα μπορούσε να προκύψει από χρ. εξυπ. ο οποίος μ.π. επιτ. p σώματα αλλιώς μ.π. αποτ. 1-p επαναλαμβ.

1.2 Διαδικασία Poisson

Απαριθμήτρια διαδικασία

Μία σ.δ. $\{N(t), t \geq 0\}$ λέγεται απαριθμήτρια αν η τ.μ. $N(t)$ δίνει αριθμό γεγονότων που έχουν συμβεί έως τη στιγμή t.



Ιδιότητες απαριθμήτριας σ.δ.

- Η $N(t)$ παίρνει τιμές στο $S = \mathbb{N}$
- Αν $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$ $(N(t) \uparrow)$
- Αν $s < t \Rightarrow N(t) - N(s) = \#$ γεγ. στο $(s, t]$

Τ.μ. που σχετίζονται με μία απαριθμήτρια $\{N(t), t \geq 0\}$

X_1 = χρόνος $1^{ου}$ γεγ.

X_n = χρόνος μεταξύ $(n-1)$-οστού και n-οστού γεγ., $n \geq 2$

$\{X_n : n \geq 1\}$ ακ. ενδιάμεσων χρόνων

S_n = χρόνος μέχρι να γίνει το n-γεγ., $n \geq 1$

$S_1 = X_1$

$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad , n \geq 1$

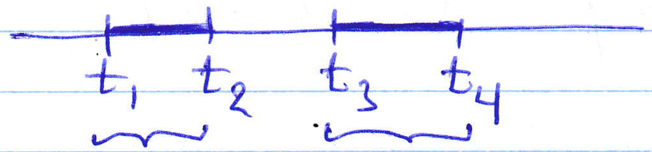
$X_n = S_n - S_{n-1} \quad , n \geq 2$

$\boxed{N(t) \geq n \iff S_n \leq t}$

\# γεγ. έως τη στιγμή t να έχω τουλ. n-γεγ. — ο χρόνος του n-γεγ. να γίνει σε χρόνο $\leq t$

Απαριθμήτρια με ανεξ. προσαυξήσεις

Μία απαριθμήτρια $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει ανεξ. προσαυξήσεις αν $\forall\ 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ ισχύει $N(t_2)-N(t_1)$ και $N(t_4)-N(t_3)$ ανεξ.



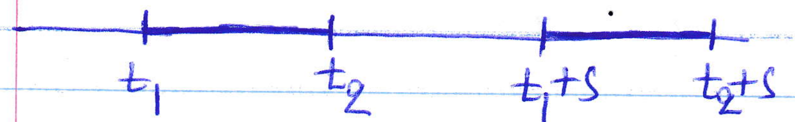
Σημ: Ο αριθμός των γεγ. σε μη επικαλυπτόμενα διαστήματα είναι ανεξ.

δηλ. οι αριθμοί γεγ. που συμβαίνουν σε μη επικαλυπτ. διαστήματα είναι ανεξ.

! Στην Poisson οι προσαυξ. είναι ανεξ. γενικά δεν ισχύει πάντα

Απαριθμήτρια με ομογενείς προσαυξήσεις

Μία απαριθμήτρια $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει ομογενείς προσαυξήσεις αν $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2,\ s \geq 0$ ισχύει $N(t_2+s) - N(t_1+s) \overset{d}{=} N(t_2) - N(t_1)$



Αν μετατοπίσω το διαστ. κατά s έχω την ίδια τ.μ.

δηλ. ο αριθμός των γεγ. που συμβ. σε ένα διάστημα εξαρτάται μόνο από το μήκος του διαστήματος και όχι από τη θέση του.

Διαδικασία Poisson : Ορισμός 1

Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται Poisson με ρυθμό λ ($P.P(\lambda)$) αν

1 i) $N(0)=0$

1.ii) ανεξ. προσαυξήσεις

1.iii) $\underbrace{P(N(t+s)-N(t)=n)} = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}, \; n=0,1,\dots$

ο # γεγ. σε διάστημα μήκους t $\sim \text{Poisson}(\lambda t)$

(ομογενείς προσ.)

$\left(E[N(t)] = \lambda t,\ Var(N(t)) = \lambda t\right)$

Διαδικασία Poisson: Ορισμός 2

Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t) : t \geq 0\}$ λέγεται Poisson με ρυθμό λ, $\lambda > 0$ αν:

2.i) $N(0) = 0$

2.ii) έχει ανεξ. και ομογ. προσ.

2.iii) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$ (πιθ. 1 γεγ. σε διαστ. μήκους h)

$P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

$P(N(h) \geq 2) = o(h)$ (πάρα πολύ μικρή πιθ.)

(Μία $f(h)$ είναι $o(h)$ όταν $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$)

Διαδικασία Poisson: Ορισμός 3

Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι Poisson με ρυθμό λ, $\lambda > 0$ αν η ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων $\{X_n : n \geq 1\}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικά κατ. τ.μ. με παράμετρο λ.

Ορισμός 2 ⇒ Ορισμός 1

(2i) ⇒ (1i) άμεσο

(2ii) ⇒ (1ii) άμεσο

(2iii) ⇒ (1iii)

αρκεί νδο $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$

Κατασκευή διαφορικών εξ. για τις $p_n(t)$

θέτω $p_n(t) = P(N(t)=n)$

Ξεκινάμε με $p_0(t)$ $0 \quad t \quad t+h$

Πρώτα πηγαίνω στην $p_0(t+h)$

$p_0(t+h) = P(N(t+h)=0) =$

$P(N(t)=0,\ N(t+h)-N(t)=0)$

$\overset{\text{ανεξ. πρ.}}{=} P(N(t)=0)\,P(N(h)=0)$

στασ. προσ.

$= p_0(t)(1-\lambda h+o(h))$

(2.ii)

$$P_0(t+h) = P_0(t) - \lambda h P_0(t) + P_0(t)\, o(h)$$

$$\Rightarrow \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h} P_0(t)$$

$$\xRightarrow{h \to 0^+} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \Rightarrow P_0'(t) + \lambda P_0(t) = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda t} P_0'(t) + \underbrace{\lambda e^{\lambda t}}_{(e^{\lambda t})'} P_0(t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(e^{\lambda t} P_0(t)\right)' = 0 \Rightarrow e^{\lambda t} P_0(t) = c$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ P(N(t)=0)}}{P_0(t)} = c e^{-\lambda t}$$

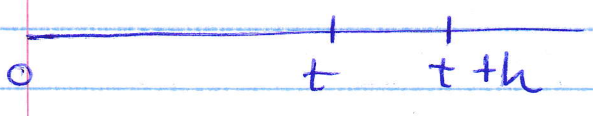
$$N(0) = 0 \Rightarrow P(N(0)=0) = 1 \Rightarrow c e^{-\lambda \cdot 0} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα, $P(N(t)=0) = e^{-\lambda t}$.

Ομοίως για $n \geq 1$

$$P_n(t+h) = P(N(t+h)=n) =$$



$$\overset{\text{θεπ}}{=} \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=n-k, \underbrace{N(t+h)-N(t)=k}^{k \text{ γεγ. στο } (t,t+h]})$$

$$\overset{\substack{\text{ομογ.}\\ \text{ανεξ.}}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} \sum_{k=0}^{n} P(N(t)=n-k)\, P(N(h)=k)$$

$$= P(N(t)=n)\underbrace{P(N(h)=0)}_{1-\lambda h+o(h)}$$

$$+ P(N(t)=n-1)\underbrace{P(N(h)=1)}_{\lambda h+o(h)}$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} P(N(t)=n-k)\underbrace{P(N(h)=k)}_{o(h)} \Longrightarrow$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h+o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h+o(h))$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)\, o(h)$$

$$\frac{P_n(t+h)}{h} - \frac{P_n(t)}{h} = -P_n(t)\frac{\lambda \cancel{h}}{\cancel{h}} + P_{n-1}(t)\frac{\lambda \cancel{h}}{\cancel{h}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{P_{n-k}(t)\, o(h)}{h}$$

$$\overset{h\to 0^+}{\Longrightarrow} \quad P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

$$e^{\lambda t} P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t} P_n(t) = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \Longrightarrow$$

$$\left(e^{\lambda t} P_n(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) \quad (1)$$

για $n=1$: $\left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow \left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' = \lambda \Rightarrow \left(e^{\lambda t} P_1(t)\right)' = (\lambda t)'$$

$$\Rightarrow e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t + c$$

$$e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda t + c$$

$$N(0) = 0 \Rightarrow P_1(0) = P(N(0)=1) = 0$$

άρα $e^{\lambda \cdot 0} \underbrace{P_1(0)}_{0} = \lambda \cdot 0 + c \Rightarrow \boxed{c = 0}$

Οπότε, $P_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t$

$$P(N(t)=1) = e^{-\lambda t} \lambda t$$

επαγωγικά $P(N(t)=n) = e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}, n=0, \ldots$