16ο ΜΑΘΗΜΑ

22/4/21

3.7 Αντιστρεψιμότητα

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχ. ΜΑΔΧ και θετικά επαναληπτική με στάσιμη κατ. $\pi = [\pi_i]_{i \in S}$. Αν $\pi^{(0)} = \pi$ τότε $\pi^{(n)} = \pi, \forall n \geq 0$

Τότε υπάρχει στασιμότητα και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξέλιξη της ξεκινάει για $t = -\infty$, δηλ. $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$

<u>ΟΡΣ</u> (αντίστροφη στοχαστικής ανέλιξης)

Έστω $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ στοχαστική ανέλιξη και $n_0 \in \mathbb{Z}$. Τότε η $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ με $Y_n = X_{n_0 - n}$, $n \in \mathbb{Z}$ λέγεται αντίστροφη της $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ως προς τη χρονική στιγμή n_0. Αν $n_0 = 0$ η $\{Y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ λέγεται τοπική αντίστροφη της $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$

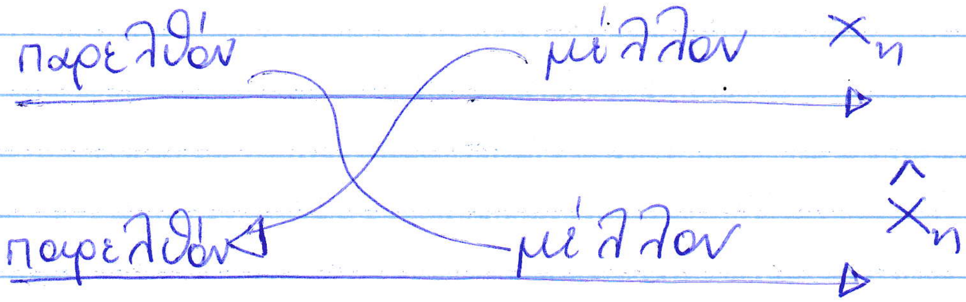
Θεώρημα

Αν η $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ είναι ΜΑΔΧ αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική, με στάσιμη κατανομή π και $\pi^{(0)}=\pi$, τότε η αντίστροφη της $\{\hat{X}_n = X_{n_0-n}, n\in\mathbb{Z}\}$ είναι αδιαχ. και θετ. επαναλ. με την ίδια στάσιμη κατανομή. Ακόμη, αν $P=[P_{ij}]_{i,j\in S}$ ο π.π.μ. της $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ και

$\hat{P}=[\hat{P}_{ij}]_{i,j\in S}$ ο π.π.μ. της $\{\hat{X}_n, n\in\mathbb{Z}\}$

Τότε, $\pi_i \hat{P}_{ij} = \pi_j P_{ji} \Longrightarrow \hat{P}_{ij} = \dfrac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}, \forall i,j\in S$

Διαισθητικά: Γιατί η αντίστροφη έχει τη Μαρκ. Ιδ.



Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, αν η κατάσταση είναι γνωστή τότε το παρελθόν της $\{X_n\}$ είναι ανεξ. από το μέλλον της $\{X_n\}$

παρελθόν της $\{X_n\}$ = μέλλον της $\{\hat{X}_n\}$
μέλλον της $\{X_n\}$ = παρελθόν της $\{\hat{X}_n\}$

Άρα τόσο το μέλλον της αντίστροφης είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν της, δεδομένης της παρούσας κατάστασης $\Rightarrow$ $\{\hat{X}_n\}$ έχει τη Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

Γιατί η $\{\hat{X}_n\}$ έχει την ίδια στάσιμη κατανομή με την $\{X_n\}$;

π_j = μακρ. ποσοστό χρόνου που η $\{X_n\}$ βρίσκεται στην κατ. j = μακρ. ποσ. χρόνου που η $\{\hat{X}_n\}$ βρίσκεται στην j ($\hat{\pi}_j$)

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i} \Longleftrightarrow \pi_i \hat{P}_{ij} = \pi_j P_{ji} \Longleftrightarrow$$

$$\hat{\pi}_i \hat{P}_{ij} = \pi_j P_{ji}$$

μακρ. ποσοστό μεταβ. τύπου $i \to j$ στην $\{\hat{X}_n\}$ — μακρ. ποσοστό μεταβ. τύπου $j \to i$ στην $\{X_n\}$

Απόδειξη

Για να είναι η $\{\hat{X}_n\}$ ΜΑΔΧ με π.π.μ. $\hat{P}=[\hat{P}_{ij}]$

και αρχική κατανομή π πρέπει

νδο

$$P(\hat{X}_0=i_0, \hat{X}_1=i_1, \dots, \hat{X}_n=i_n) = \pi_{i_0} \hat{P}_{i_0 i_1} \cdots \hat{P}_{i_{n-1} i_n}$$

Έχουμε

$$P(\hat{X}_0=i_0, \hat{X}_1=i_1, \dots, \hat{X}_n=i_n) \overset{\hat{X}_n = X_{n_0-n}}{=\!=\!=}$$

$$P(X_{n_0}=i_0, X_{n_0-1}=i_1, X_{n_0-2}=i_2, \dots, X_{n_0-n}=i_n)$$

$$= P(X_{n_0-n}=i_n, X_{n_0-n+1}=i_{n-1}, \dots, X_{n_0-1}=i_1, X_{n_0}=i_0)$$

$$\overset{\text{πολ/κο}}{\underset{\text{νόμο}}{=\!=}} \pi_{i_n} P_{i_n i_{n-1}} P_{i_{n-1} i_{n-2}} \cdots P_{i_2 i_1} P_{i_1 i_0}$$

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}$$

$$= \underbrace{\frac{\pi_{i_n}}{\pi_{i_{n-1}}} P_{i_n, i_{n-1}}}_{\hat{P}_{i_{n-1}, i_n}} \underbrace{\frac{\pi_{i_{n-1}}}{\pi_{i_{n-2}}} P_{i_{n-1}, i_{n-2}}}_{\hat{P}_{i_{n-2}, i_n}} \cdots \underbrace{\frac{\pi_{i_2}}{\pi_{i_1}} P_{i_2, i_1}}_{\hat{P}_{i_1, i_2}} \underbrace{\frac{\pi_{i_1}}{\pi_{i_0}} P_{i_1, i_0}}_{\hat{P}_{i_0, i_1}} \pi_{i_0}$$

$$= \pi_{i_0} \hat{P}_{i_0, i_1} \hat{P}_{i_1, i_2} \cdots \hat{P}_{i_{n-2}, i_{n-1}} \hat{P}_{i_{n-1}, i_n}$$

Άρα η $\{\hat{X}_n\}$ είναι ΜΑΔΧ με π.π.μ. $\hat{P} = [\hat{P}_{ij}]$ και αρχική κατανομή την π.

Τώρα δδο η π είναι στάσιμη της $\{\hat{X}_n\}$ δείχνοντας ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \in S} \cancel{\pi_i} \frac{\pi_j P_{ji}}{\cancel{\pi_i}} = \pi_j \sum_{i \in S} P_{ji} = \pi_j$$

Άρα η π είναι στάσιμη κατανομή της $\{\hat{X}_n\} \Rightarrow$ η $\{\hat{X}_n\}$ είναι θετικά επαναληπτική.

<u>ΟΡΣ</u> (Αντιστρέψιμες Στοχαστικές Ανελίξεις)

Αν $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ στοχαστική ανέλιξη και $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ η αντίστροφη της, τότε η $\{X_n\}$ λέγεται αντιστρέψιμη αν οι $\{X_n\}$ και $\{\hat{X}_n\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες.

Θεώρημα (Αντιστρέψιμες ΜΑΔΧ)

Έστω $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ΜΑΔΧ αδιαχ., θετικά επαν. με στάσιμη κατανομή π, π.π.μ. P και $\pi^{(0)} = \pi$.

Τότε, $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow P = \hat{P} \Leftrightarrow$

$$P_{ij} = \hat{P}_{ij}, \forall i,j \in S \Leftrightarrow P_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}, \forall i,j \in S \Leftrightarrow$$

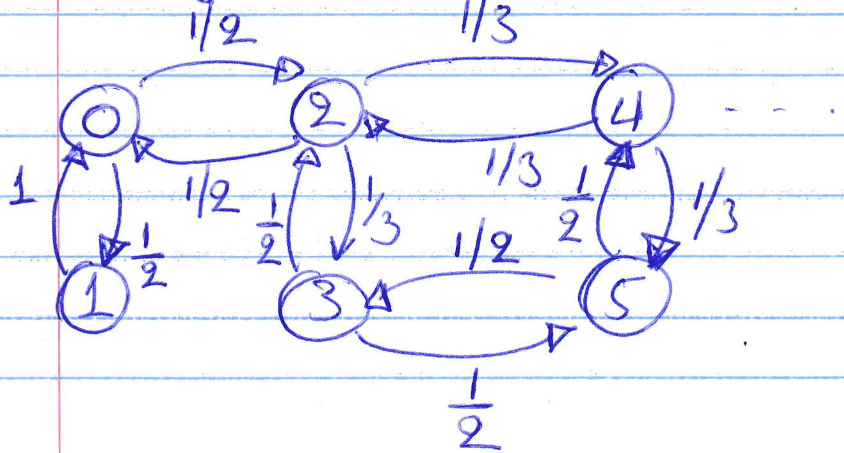
$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \quad \forall i,j \in S \quad \text{εξ. λεπτομερούς ισορροπίας}$$

$\pi_i P_{ij}$: μακρ. ποσοστό μεταβ. $i \to j$
$\pi_j P_{ji}$: μακρ. ποσοστό μεταβ. $j \to i$

Σημείωση:

Εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας $\Longrightarrow$ Εξισώσεις πλήρους ισορροπίας
Εξισώσεις πλήρους ισορροπίας $\not\Longrightarrow$ Εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας

Πώς υπολογίζω στάσιμη κατανομή όταν γνωρίζω ότι είναι αντιστρέψιμη;



• Επιλέγουμε μία κατάσταση (έστω την 0)
• Για κάθε άλλη κατάσταση i, επιλέγω μονοπάτι

$$0 \to i_1 \to i_2 \to \dots \to i_{n-1} \to i$$

Τότε από τις εξισώσεις λεπτομερούς ισορ.

έχω

$$0 \leftrightarrow i_1 : \pi_0 P_{0 i_1} = \pi_{i_1} P_{i_1 0} \Leftrightarrow \pi_{i_1} = \frac{P_{0 i_1}}{P_{i_1 0}} \pi_0$$

$$i_1 \leftrightarrow i_2 : \pi_{i_1} P_{i_1 i_2} = \pi_{i_2} P_{i_2 i_1} \Leftrightarrow \pi_{i_2} = \frac{P_{i_1 i_2}}{P_{i_2 i_1}} \pi_{i_1}$$

$\vdots$

$$i_{n-2} \leftrightarrow i_{n-1} : \pi_{i_{n-2}} P_{i_{n-2}, i_{n-1}} = \pi_{i_{n-1}} P_{i_{n-1}, i_{n-2}}$$

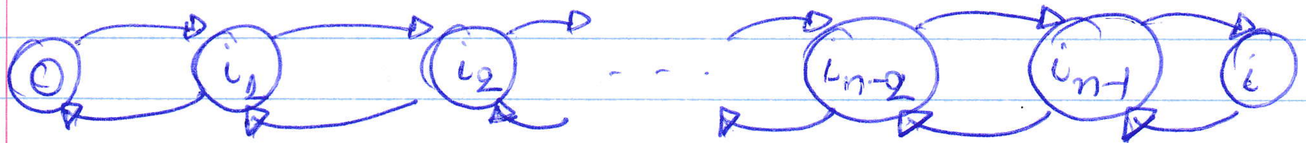
$$\Leftrightarrow \pi_{i_{k-1}} = \frac{P_{i_{n-2}, i_{n-1}}}{P_{i_{n-1}, i_{n-2}}} \pi_{i_{n-2}}$$

$$i_{n-1} \leftrightarrow i : \pi_{i_{n-1}} P_{i_{n-1} i} = \pi_i P_{i, i_{n-1}} \Leftrightarrow$$

$$\pi_i = \frac{P_{i_{n-1}, i}}{P_{i, i_{n-1}}} \pi_{i_{n-1}}$$

$$\pi_i = \frac{P_{i_{n-1}, i}}{P_{i, i_{n-1}}} \frac{P_{i_{n-2}, i_{n-1}}}{P_{i_{n-1}, i_{n-2}}} \dots \frac{P_{i_1, i_2}}{P_{i_2, i_1}} \frac{P_{0, i_1}}{P_{i_1, 0}} \pi_0$$

$$\pi_i = \frac{P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} \cdots P_{i_{n-2},i_{n-1}} P_{i_{n-1},i}}{P_{i,i_{n-1}} P_{i_{n-1},i_{n-2}} \cdots P_{i_2,i_1} P_{i_1,0}} \pi_0$$



$0 \to 2 \to 4$

$$\pi_4 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \pi_0 \Rightarrow \pi_4 = \frac{3}{2} \pi_0$$

$4 \to 2 \to 0$

$0 \to 2 \to 3 \to 5$

$$\pi_5 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \pi_0 \Rightarrow \boxed{\pi_5 = \pi_0}$$

Βρίσκω το π_0 από την εξ. κανονικοποίησης

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Άρα, αν είναι αντιστρέψιμη βρίσκω εύκολα τη στάσιμη.

▽ Ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας που δεν χρησιμοποιεί την στάσιμη χρειάζεται.

Θεώρημα (Κριτήριο Αντιστρεψιμότητας Kolmogorov)

$\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη, θετικά επαν. ΜΑΔΧ

$\{X_n, n \geq 0\}$ αντιστρέψιμη $\Longleftrightarrow$

$\forall$ κάθε κύκλο καταστάσεων

$$i_0 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_n \to i_0$$

αρκεί να δειχθεί για τους απλούς κύκλους

ισχύει: $p_{i_0 i_1} p_{i_1, i_2} \cdots p_{i_{n-1}, i_n} = p_{i_0, i_n} p_{i_n, i_{n-1}} \cdots p_{i_2, i_1} p_{i_1, i_0}$

Απόδειξη:

($\Longrightarrow$) Έστω ότι είναι αντιστρέψιμη $\Longrightarrow$

$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}, \ \forall i, j \in S$.

Αν

$$i_n \to i_0 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_{n-1} \to i_n$$

ένας κύκλος, τότε

$$P_{i_0,i_1}P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_n i_0} =$$

$$\frac{\Pi_{i_0}P_{i_0 i_1}P_{i_1 i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_n i_0}}{\Pi_{i_0}} =$$

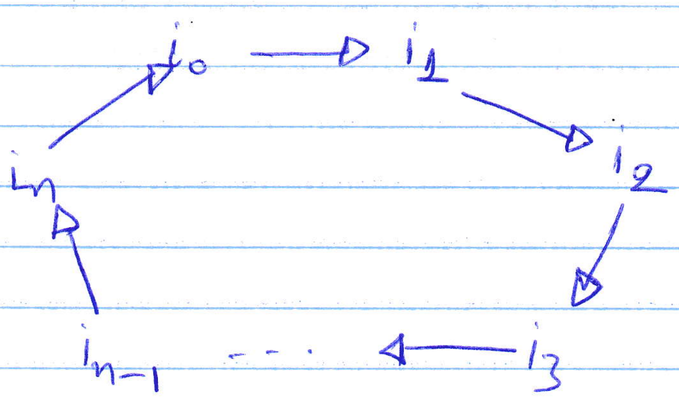
$$\frac{P_{i_1 i_0}\Pi_{i_1}P_{i_1 i_2}P_{i_2 i_3}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_n i_0}}{\Pi_{i_0}} =$$

$$\frac{P_{i_1 i_0}P_{i_2 i_1}\Pi_{i_2}P_{i_2 i_3}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_n i_0}}{\Pi_{i_0}}$$

$$\frac{P_{i_1 i_0}P_{i_2 i_1}P_{i_3 i_2}\Pi_{i_3}\cdots P_{i_n i_{n-1}}P_{i_0 i_n}\cancel{\Pi_{i_0}}}{\cancel{\Pi_{i_0}}} =$$

$$P_{i_0 i_n}P_{i_n i_{n-1}}P_{i_{n-1} i_{n-2}}\cdots P_{i_3 i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 i_0}$$

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάθε κύκλο



έχουμε $P_{i_0 i_1}P_{i_1 i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_n i_0} = P_{i_0 i_n}P_{i_n i_{n-1}}\cdots$

$$P_{i_3 i_2}P_{i_2 i_1}P_{i_1 i_0}$$

Αθροίζοντας για όλα τα μονοπάτια παίρνω

$$P_{i_0 i_1} P^{(n)}_{i_1 i_0} = P^{(n)}_{i_0 i_1} P_{i_1 i_0}$$

$$\overset{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1}}{k}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P_{i_0 i_1} P^{(n)}_{i_1 i_0}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P^{(n)}_{i_0 i_1} P_{i_1 i_0}}{k}$$

$$\Longrightarrow P_{i_0 i_1} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P^{(n)}_{i_1 i_0}}{k}}_{\substack{c-\lim P^{(n)}_{i_1 i_0} \\ \| \\ \Pi_{i_0}}} = P_{i_1 i_0} \underbrace{\lim_{k} \frac{\sum_{n=0}^{k-1} P^{(n)}_{i_0 i_1}}{k}}_{\substack{c-\lim_{n} P^{(n)}_{i_0 i_1} \\ \| \\ \Pi_{i_1}}}$$

$$\boxed{\Pi_{i_0} P_{i_0 i_1} = \Pi_{i_1} P_{i_1 i_0}}$$ εξ. λεπτομερούς ισορροπίας.