13ο ΜΑΘΗΜΑ

8/4/2021

j επαναληπτική $\Leftrightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1$

$\Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 1$

P(επισκεφθώ ∞ φορές την j)

j- επαν. $\Leftrightarrow \sum_{n>0} p_{jj}^{(n)} = \infty$

j-παροδική $\Leftrightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) < 1 \Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 0$

$\Updownarrow$

$\sum_{n \geq 0} p_{jj}^{(n)} < \infty$

<u>Θεώρημα</u> (Επαναληπτικότητα/Παροδικότητα είναι ιδιότητες κλάσεις επικοινωνίας)

α) i επαναληπτική, $i \to j \Rightarrow j$-επαναληπτική

β) i παροδική, $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$-παροδική

<u>Απ.</u>

α) Έστω $i, j \in S$ με $i \leftrightarrow j$ και i επαναληπτική.

Τότε, $\exists\, m, n \in \mathbb{Z} : p_{ji}^{(m)} > 0$ κ' $p_{ij}^{(n)} > 0$

επίσης για $\forall\, r = 0, 1, \ldots$ $p_{jj}^{(m+r+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)}$

εφόσον i-επαναληπτική $\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty \Rightarrow$

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+r+n)} \geq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+r+n)} = \infty \Rightarrow \sum_{r'=m+n}^{\infty} p_{jj}^{(r')} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r'=0}^{\infty} p_{jj}^{(r')} = \infty \Rightarrow$$ j-επαναληπτική.

β) Έστω i παροδική και $i \leftrightarrow j$

Τότε $\exists\, m,n$: $p_{ji}^{(m)} > 0$, $p_{ij}^{(n)} > 0$

και $\forall r = 0,1,\ldots$ $p_{ii}^{(m+r+n)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(n)}$

εφόσον i-παροδική $\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow$

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(m+r+n)} < \infty$$

το δεξί μέλος έχει λιγότερους όρους

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(n)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(m+r+n)} < \infty$$

$$\Rightarrow p_{ij}^{(n)}\left(\sum_{r\geq 0} p_{jj}^{(r)}\right) p_{ji}^{(m)} < \infty \Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} < \infty \Rightarrow j\text{-παροδ.}$$

<u>ΟΡΣ</u>

Μία κλάση επικοινωνίας καλείται επαναληπτική (παροδική) αν όλες οι καταστάσεις σε αυτή είναι επαναληπτικές (παροδικές).

<u>Θεώρημα:</u>

α) Κάθε επαναληπτική κλάση είναι κλειστή
β) Κάθε ανοιχτή κλάση είναι παροδική

<u>Απ:</u>

α) Έστω C επαναληπτική κλάση. Έστω C ανοικτή

Άρα, $\exists\ i \in C$ και $j \notin C : i \to j$, δηλ. $\exists\ m : p_{ij}^{(m)} > 0$

εφόσον $i \in C$ και C επαναληπτική $\Rightarrow$

$$h_i = P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_0 = i) = 1 \overset{\text{ΘΟΠ}}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{k\in S} P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_m = k, X_0 = i)\, P(X_m = k \mid X_0 = i) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in S} P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_m = k)\, p_{ik}^{(m)} = 1$$

Έχουμε $\sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} = 1$, άρα θα πρέπει

$P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_m = k) = 1, \forall k \in S$ με $p_{ik}^{(m)} > 0$

$\Rightarrow P(T_i^{(1)} < \infty \mid X_m = j) = 1$ $(j \to i)$

άτοπο αφού $j \not\to i$

διότι η j δεν ανήκει στην κλάση επικοινωνίας C_i

Άρα, C_i κλειστή.

β) Έστω C_i ανοιχτή. Έστω C_i επαναληπτική

Τότε από (α) η C_i κλειστή. άτοπο, άρα

C_i παροδική.

<u>Θεώρημα</u>

Κάθε κλειστή και πεπερασμένη κλάση είναι επαναληπτική.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω C κλειστή και πεπ. κλάση

Αν $X_0 \in C$ τότε $\forall i \in C$

$P($η $\{X_n\}$ επισκέπτεται την i ∞ φορές$) > 0$

$\Rightarrow P($η $\{X_n\}$ επισκέπτεται την $i) \times$

$\underbrace{P(\text{η } \{X_n\} \text{ επισκ. την } i\ \infty \text{ φορές} \mid X_0 = i)}_{P(N_i(\infty) = \infty) > 0} > 0$

$\Rightarrow$ i-επαν., διότι αν ήταν παροδική

θα είχα $P(N_i(\infty)=\infty)=0$

$\circledast$ $Pr(T_i^{(1)}<\infty \mid X_m=k, X_0=i)=1 \Rightarrow$

$Pr(T_i^{(1)}<\infty \mid X_0=k)=1$

$$\underbrace{Pr(T_i^{(1)}<\infty \mid X_m=k, X_0=i, T_i^{(1)}\in\{1,\dots,m\})}_{=1} \underbrace{P(T_i^{(1)}\in\{1,\dots,m\} \mid X_m=k, X_0=i)}_{\geq 0}+$$

$$Pr(T_i^{(1)}<\infty \mid X_m=k, X_0=i, T_i^{(1)}>m) \underbrace{P(T_i^{(1)}>m \mid X_m=k, X_0=i)}_{\geq 0}=1$$

$\Rightarrow Pr(T_i^{(1)}<\infty \mid X_0=i, T_i^{(1)}>m, X_m=k)=1$

$\Rightarrow P(T_i^{(1)}<\infty \mid X_0=k)=1.$

Θεώρημα

Αν i, j καταστάσεις αδιαχώριστες και επαναληπτικές ΜΑΔΧ τότε $P(T_j^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1$

Απ:

$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, m > 0 : p_{ji}^{(m)} > 0$

j-επαν. $\Rightarrow P(T_j^{(1)} < \infty | X_0 = j) = 1$

$$\overset{\text{ΘΟΠ}}{\Longrightarrow} \sum_{k \in S} P(T_j^{(1)} < \infty | X_m = k, X_0 = j) \underbrace{P(X_m = k | X_0 = j)}_{p_{jk}^{(m)}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in S} P(T_j^{(1)} < \infty | X_m = k, X_0 = j) \underbrace{p_{jk}^{(m)}}_{\geq 0} = 1$$

$$\overset{\sum_k p_{jk}^{(m)} = 1}{\Longrightarrow} P(T_j^{(1)} < \infty | X_m = k, X_0 = j) = 1 \;\forall k \text{ με } p_{jk}^{(m)} > 0$$

$P(T_j^{(1)} < \infty | X_m = i, X_0 = j) = 1$

$P(T_j^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1$

3.6 Στάσιμη κατανομή

ΟΡΣ (Στάσιμο μέτρο και στάσιμη κατανομή)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S και πίνακα πιθ. μετ. $P = [P_{ij}]$

Ένα $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ λέγεται στάσιμο μέτρο ή μέτρο ισορροπίας της $\{X_n, n \geq 0\}$ αν

$$\lambda \cdot P = \lambda \Rightarrow \sum_{i \in S} \lambda_i P_{ij} = \lambda_j, \ j \in S \quad \text{(εξ. πλήρους ισορροπίας)}$$

Αν $\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$ (εξ. κανονικοποίησης) το λ λέγεται στάσιμη κατανομή

Σημείωση: Αν ο χ.κ. S είναι πεπερασμένος δηλαδή ο P είναι πεπερασμένης διάστασης τότε το λ είναι στάσιμο αν το λ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P με ιδιοτιμή 1

Θεώρημα

$\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με $|S|=k$ $\Rightarrow \exists$ στάσιμη κατανομή της $\{X_n, n\geq 0\}$

Απ:

Το $e=\begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix}$ είναι δεξί ιδιοδιάνυσμα του P με ιδιοτιμή το 1

αφού $Pe=e \Leftrightarrow \sum_{j\in S} p_{ij}=1, \forall i\in S$

άρα $\exists$ αριστερό ιδιοδ. που αντιστοιχεί στο 1 έστω $\lambda=[\lambda_1,\dots,\lambda_k]$ δηλ. $\exists\,\lambda: \lambda P=\lambda$

Τότε αν $\pi_i=\dfrac{\lambda_i}{\sum_{j\in S}\lambda_j}, i=1,\dots,k$

$\pi=[\pi_0,\pi_1,\dots,\pi_k]$ είναι στάσιμη κατανομή

αφού $\sum_{i\in S}\pi_i=\sum_{i\in S}\dfrac{\lambda_i}{\sum_{j\in S}\lambda_j}=1$

και $\pi\cdot P=\dfrac{\lambda P}{\sum_{j\in S}\lambda_j}=\dfrac{\lambda}{\sum_{j\in S}\lambda_j}=\pi$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\{X_n, n \geq 0\} \text{ ΜΑΔΧ με} \\ \text{στάσιμη κατανομή} \\ \pi = [\pi_i]_{i \in S} \quad \pi^{(0)} = \pi \\ \text{π.π.μ. } P\end{array}\right\} \Rightarrow \pi^{(k)} = \pi$$

Απόδειξη:

εφόσον π στάσιμη κατανομή

$\pi P = \pi$ και $\pi e = 1$

τότε $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \underbrace{\pi P}_{\pi} P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \underbrace{\pi P}_{\pi} P^{n-2}$

$= \dots = \pi$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\{X_n, n \geq 0\} \text{ ΜΑΔΧ με} \\ \text{πεπ. χ.κ. } S \\ \text{ππμ } P = [P_{ij}] \text{ και} \\ \text{για κάποιο } i \in S \\ \exists \lim_n p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \forall j\end{array}\right\} \begin{array}{l}\pi = [\pi_j]_{j \in S} \text{ είναι η} \\ \text{στάσιμη κατανομή} \\ \text{της } \{X_n, n \geq 0\}\end{array}$$

Απ:

Θ.δ.ο. $\pi e = 1 \iff \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ και $\pi P = \pi$

$\Rightarrow \sum_{k \in S} \pi_k P_{kj} = \pi_j \ , \ \forall j \in S$

έχουμε $\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n} \underbrace{\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}}_{1}$

$= 1$

και $\sum_{k \in S} \pi_k P_{kj} = \sum_{k \in S} \lim_{n} p_{ik}^{(n)} P_{kj} = \lim_{n} \underbrace{\sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} P_{kj}}_{p_{ij}^{(n+m)}}$

$= \lim p_{ij}^{(n+1)} = \pi_j$