11$^{\underline{o}}$ ΜΑΘΗΜΑ

1/4/2021

3. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ)

Μαρκοβιανή Ιδιότητα: Αν η παρούσα κατάσταση του συστήματος είναι γνωστή, το μέλλον του συστήματος δεν εξαρτάται από το παρελθόν.

ΟΡΣ (ΜΑΔΧ)

Μία σ.δ. $\{X_n, n \geq 0\}$ με χ.κ. S λέγεται ΜΑΔΧ αν

$$P(\underbrace{X_{n+1}=j}_{\text{μέλλον}} | \underbrace{X_n=i}_{\text{παρόν}}, \underbrace{X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \ldots, X_0=i_0}_{\text{παρελθόν}})$$

$$= P(X_{n+1}=j | X_n=i) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; i=i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$$

ΟΡΣ (Χρονικά Ομογενής ΜΑΔΧ)

Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n \geq 0\}$ με χ.κ. S καλείται (χρονικά) ομογενής αν οι πιθανότητες

$P(X_{n+1}=j | X_n=i)$ είναι ανεξ. του n $\forall i,j \in S$

Τότε $P_{ij} = P(X_{n+1}=j | X_n=i)$

$\underbrace{P_{ij}}$ → πιθανότητα μετ. $i \to j$ 1$^{\text{ης}}$ τάξης

* Θα ασχοληθούμε με χρονικά ομογενείς ΜΑΔΧ.

ΟΡΣ (Πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης $1^{ης}$ τάξης)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ μία ΜΑΔΧ με χ.κ S

Ο πίνακας $P=[p_{ij}]_{i,j\in S}$ ονομάζεται πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης ($1^{ης}$ τάξης)

Ισχύουν: (i) $p_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \geq 0, \forall i,j\in S$

(ii) $\sum_{j\in S} p_{ij} = \sum_{j\in S} P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

$= P(X_{n+1}\in S \mid X_n=i) = 1, \forall i$

πιθ. να είμαι σε οποιαδήποτε κατ. δεδ. ότι ήμουν στην i

ΟΡΣ (Στοχαστικός Πίνακας)

Ένας $A=[a_{ij}]$ στοχαστικός $\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{ij}\geq 0 & \forall i,j\in M \\ \sum_{j\in M} a_{ij} = 1, & \forall i\in M \end{cases}$

Θεώρημα

$\left.\begin{array}{l}\{X_n, n\geq 0\} \text{ ΜΑΔΧ} \\ \text{χ.κ. } S \\ P=[P_{ij}] \text{ πίνακας πιθ. μετ.}\end{array}\right\} \Longrightarrow P$ στοχαστικός

ΟΡΣ (αρχική κατανομή)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Θέτουμε

$\pi^{(0)}(i) = P(X_0 = i), \ i \in S$

Το διάνυσμα $\pi^{(0)} = [\pi^{(0)}(i)]_{i\in S}$ που δίνει την κατανομή της X_0 ονομάζεται αρχική κατανομή της ΜΑΔΧ.

Θεώρημα

Η ΜΑΔΧ χαρακτηρίζεται πλήρως από την αρχική κατανομή $\pi^{(0)}$ και τον πίνακα πιθ. μετάβασης $P=[P_{ij}]$

Απόδειξη

$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n) =$

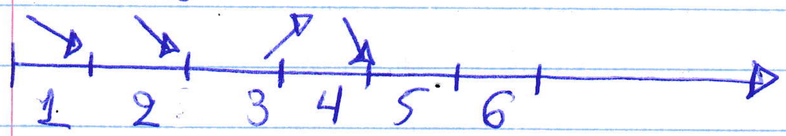
$P(X_0=i_0)P(X_1=i_1 | X_0=i_0)P(X_2=i_2 | X_1=i_1, X_0=i_0)\cdots$
$P(X_n=i_n | X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0)$

Μαρκ. $P(X_0=i_0)\,P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0)\cdots P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1})$

$= \pi^{(0)}(i_0)\,P_{i_0,i_1}\,P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{n-1},i_n}$

παράδειγμα (Σύστημα εξυπηρέτησης διακριτού χρόνου)

Χωρίζουμε το χρόνο σε διαστήματα



- Ένας υπηρέτης
- Η πιθανότητα να φθάσει 1 πελάτης σε ένα διάστημα είναι p. Η πιθ. να μη φθάσει κανείς $1-p$. Οι πελ. φθάνουν στο τέλος ενός διαστήματος.
- Αν στην αρχή του διαστήματος υπάρχει πελάτης που εξυπηρετείται τότε η εξυπηρέτησή του ολοκληρώνεται σε αυτό το διάστημα μ.π. q

Αν ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση ο πελάτης αναχωρεί ακριβώς πριν το τέλος του διαστήματος.

X_n = # πελ. στο συσ. στο τέλος του διαστήματος n

Η $\{X_n, n\geq 0\}$ έχει τη Markov. ιδ.

Έστω $i>0$,

$$P_{i,i-1} = P(X_{n+1} = i-1 \mid X_n = i) = q(1-p)$$

$$P_{i,i} = P(X_{n+1} = i \mid X_n = i) = \underbrace{p\,q}_{\text{αφίξη ανάχ.}} + \underbrace{(1-p)(1-q)}_{\text{όχι αφίξη όχι ανάχ.}}$$

$$P_{i,i+1} = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = p(1-q)$$

$$P_{ij} = 0, \ \forall j \notin \{i-1, i, i+1\}$$

Για $i=0$

$$P_{0,0} = P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1-p \quad \text{όχι αφίξη}$$

$$P_{0,1} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p \quad \text{αφίξη}$$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\hline
0 & 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\
1 & (1-p)q & pq+(1-p)(1-q) & p(1-q) & 0 & \cdots \\
2 & 0 & (1-p)q & pq+(1-p)(1-q) & p(1-q) & \cdots \\
3 & 0 & 0 & (1-p)q & pq+(1-p)(1-q) & \cdots \\
\vdots & & & & &
\end{array}$$

$$\pi^{(0)} = [1, 0, \dots 0]$$

παράδειγμα 2

Έχουμε 2 κάλπες : A και B

Η κάθε μία έχει N σφαιρίδια

Και οι δύο μαζί έχουν N μαύρα και N άσπρα σφαιρίδια.

Κάνουμε το παρακάτω πείραμα:

Επιλέγουμε σε κάθε βήμα ένα σφαιρίδιο από κάθε κάλπη και τα αλλάζουμε

Έστω X_n ο αριθμός των άσπρων σφαιριδίων στην κάλπη A μετά το n-οστό βήμα.

Η $\{X_n, n\geq 0\}$ είναι ΜΑΔΧ με χ.κ. $S=\{0,\dots,N\}$ και πιθ. μετ. $1^{ης}$ τάξης:

A	B
i-άσπρα N-i μαύρα	N-i άσπρα i μαύρα

Για $i\in\{1,\dots,N-1\}$

$$P_{i,i-1} = P(X_{n+1}=i-1 \mid X_n = i) =$$

$$= \underbrace{\frac{i}{N}}_{\text{άσπρο A}}\ \underbrace{\frac{i}{N}}_{\text{μαύρο B}} = \left(\frac{i}{N}\right)^2$$

$$P_{i,i} = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = \frac{i}{N}\,\frac{N-i}{N} + \frac{N-i}{N}\cdot\frac{i}{N}$$

$$= 2\,\frac{i(N-i)}{N^2}$$

$$P_{i,i+1} = P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i) = \underset{\substack{\text{μαύρο}\\ A}}{\frac{N-i}{N}}\;\underset{\substack{\text{άσπρο}\\ B}}{\frac{N-i}{N}}$$

<u>$i=0$</u> :

A	B
0 άσπρα	N άσπρα
N μαύρα	0 μαύρα

$$P_{0,1} = P(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = 1$$

$P_{0,j} = 0 \;,\; \forall j = 0, 2, \ldots, N$

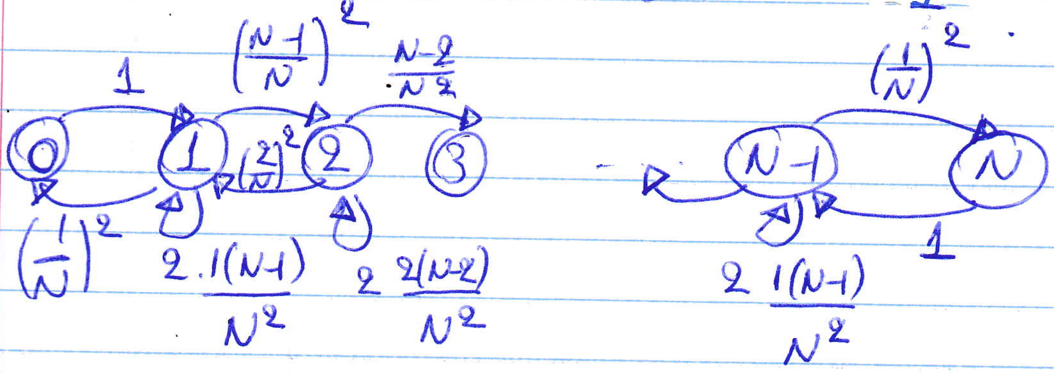
<u>$i=N$</u>

A	B
N άσπρα	0 άσπρα
0 μαύρα	N μαύρα

$$P_{N,N-1} = P(X_{n+1} = N-1 \mid X_n = N) = 1$$

$$P_{N,j} = 0 \quad \forall j = 0, 1, \ldots, N-2, N$$

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & N-1 & N \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\left(\frac{1}{N}\right)^2 & 2\frac{N-1}{N^2} & \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \left(\frac{2}{N}\right)^2 & 2\,\frac{2(N-2)}{N^2} & \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
 & & & & & \frac{2(N-1)1}{N^2} & \left(\frac{1}{N}\right)^2 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$



3.2 Μεταβατική Κατανομή

Βασικοί Ορισμοί

$\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ

με χ.κ. S

αρχική κατανομή $\pi^{(0)} = \left[\pi^{(0)}(i)\right]_{i \in S}$

πιν. πιθ. μετάβασης $P = \left[p_{ij}\right]_{i,j \in S}$

Ορίζουμε

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i),\ i,j \in S$

$\rightarrow$ πιθ. μετάβασης n-τάξης

$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]$

$\rightarrow$ πίνακας πιθ. μετάβασης n-οστής τάξης

$\pi_i^{(n)} = P(X_n = i)\ ,\ i \in S$

$\rightarrow$ μεταβατική πιθ. n-οστής τάξης

$\pi^{(n)} = [\pi_i^{(n)}]_{i \in S}$: μεταβατική κατανομή n-οστής τάξης

$m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{matrix}\#\ \text{επισκέψεων} \\ \text{στην } j \text{ στα πρώτα} \\ n \text{ βήματα}\end{matrix} \middle| X_0 = i\right]$

$M^{(n)} = [m_{ij}^{(n)}]_{i,j \in S}$

Θεώρημα (Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}, \quad i,j \in S$$

όπου $k \in \{0, \dots, n\}$

Ισοδύναμα,

$$P^{(n)} = \mathbb{P}^{(k)} \mathbb{P}^{(n-k)}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

$$P^{(5)} = \mathbb{P}^{(2)} \mathbb{P}^{(3)}$$

Απόδειξη:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$\underset{\substack{\text{δεσμεύω ως} \\ \text{προς την} \\ \text{κατάσταση την} \\ \text{στιγμή } k}}{\overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=}} \sum_{r \in S} P(X_k = r \mid X_0 = i) P(X_n = j \mid X_k = r, X_0 = i)$$

$$\underset{\text{Ιδ.}}{\overset{\text{Μαρκοβ.}}{=}} \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} P(X_n = j \mid X_k = r)$$

$$\underset{\text{ομογ.}}{\overset{\text{Χρ.}}{=}} \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} P(X_{n-k} = j \mid X_0 = r)$$

$$= \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)} \Rightarrow p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(n-k)}$$

$$= (i \text{ γραμμή του } \mathbb{P}^{(k)}) \times (j \text{ στήλη του } \mathbb{P}^{(n-k)})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(k)} \mathbb{P}^{(n-k)}$$

$$P^{(3)} = \mathbb{P}^{(1)} \mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^{(1)} \mathbb{P}^{(1)} \mathbb{P}^{(1)} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^3$$

Θεώρημα $\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^n, n \geq 0$

Απ: Με επαγωγή

$\mathbb{P}^{(0)} = I = \mathbb{P}^0$ και $\mathbb{P}^{(1)} = P = \mathbb{P}^2$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο k, δηλ.

$\mathbb{P}^{(k)} = \mathbb{P}^k$ τότε

$$\mathbb{P}^{(k+1)} \overset{C-K}{=} \mathbb{P}^{(k)} \mathbb{P}^{(1)}$$
$$= \mathbb{P}^k \mathbb{P}$$
$$= \mathbb{P}^{k+1}$$

Θεώρημα

$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} \mathbb{P}^n, n = 0, 1, \ldots$$

Απόδειξη:

έχουμε $\Pi_i^{(n)} = P(X_n = i) \overset{\Theta.O.\Pi.}{=} \sum_{j \in S} P(X_n = i | X_0 = j) P(X_0 = j)$

$$= \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} \Pi_j^{(0)} \Rightarrow$$

$$\Pi_i^{(n)} = \sum_{j \in S} \Pi_j^{(0)} p_{ji} \Rightarrow$$
$$\Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} \mathbb{P}^{(n)} \Rightarrow \Pi^{(n)} = \Pi^{(0)} \mathbb{P}^n$$