10ο ΜΑΘΗΜΑ

30/3/2021

Άσκηση (Οριακός Μέσος Υπολειπόμενος Χρόνος)

$\{N(t), t\geq 0\}$ απεριοδική RP με

ενδ. χρόνους ανανέωσης $\{X_n, n\geq 1\}$

με σ.κ. G και μ.τ. $\tau = E(X_n)$: $0<\tau<\infty$

$Var(X_n)=\sigma^2<\infty$

Νδο $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \dfrac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}$

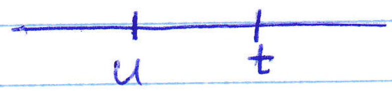
Λύση:

Έστω $H(t)=E[B(t)]$ για να φτιάξω ανανεωτική εξίσωση

Δεσμεύω ως προς το χρόνο του 1ου γεγ. S_1

$$E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t)|S_1=u]\,dG(u)$$

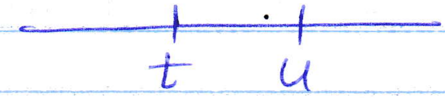
Αν $u\le t$



$$E[B(t)|S_1=u] = E[B(t-u)] = H(t-u)$$

τη στιγμή u που γίνεται ανάν. το συσ. ξεκινά από την αρχή (ανάν. ιδιοτ.)

Αν $u>t$



$$E[B(t)|S_1=u] = u-t$$

άρα $H(t) = \int_0^\infty E[B(t)|S_1=u]\, dG(u) =$

$$\int_0^t H(t-u)\,dG(u) + \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\,dG(u)}_{D(t)} \Rightarrow$$

$$H(t) = \int_t^\infty (u-t)\,dG(u) + (H*G)(t)$$

$$= \underbrace{\int_t^\infty (1-G(u))\,du}_{D(t)} + (H*G)(t)$$

Άρα η $H(t)$ ικανοποιεί ανανεωτική εξίσωση

με $D(t) = \int_t^\infty (1-G(u))\,du$

Η $D(t)$ είναι φθίνουσα και

$$0 \le D(t) = \int_t^\infty (1-G(u))\,du \le \int_0^\infty (1-G(u))\,du = \tau$$

Άρα, $D(t) = D(t) - 0$ διαφορά δύο μη-αρν. μονότονων, φραγμένων συναρτήσεων.

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(u))\,du\,dt$$

$$\overset{0<t<u<\infty}{=\!=} \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(u))\,du\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^u (1-G(u))\,dt\,du = \int_0^\infty (1-G(u)) \underbrace{\int_0^u dt}_{u}\, du =$$

$$= \int_0^\infty u(1-G(u))\,du = \frac{EX_n^2}{2} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2} < \infty$$

Άρα, $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

οι προϋποθέσεις του ΒΑΘ ικανοποιούνται

Εφαρμόζοντας ΒΑΘ

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}$$

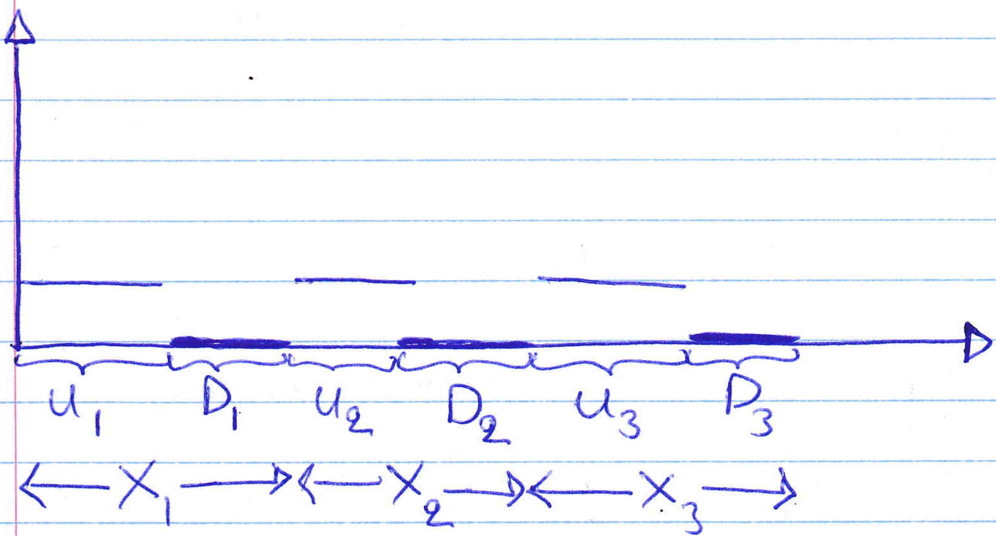
Άσκηση (Εναλλασσόμενη Ανανεωτική Διαδικασία)

Μηχανή που λειτουργεί, χαλάει, επισκευάζεται κτλ.

$U_1, U_2, \ldots$ ανεξ. ισον. τ.μ. : χρόνοι λειτουργίας

$D_1, D_2, \ldots$ ανεξ. ισον. τ.μ. : χρόνοι επισκευής

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν λειτουργεί} \\ 0, & \text{όταν είναι χαλασμένη} \end{cases}$$



Η διαδικασία ανανεώνεται κάθε στιγμή που η μηχανή αρχίζει να λειτουργεί

$X_n = U_n + D_n$ έχουμε ανανεωτική διαδικασία

$\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδ. χρόνους ανανέωσης X_n

Αν η G είναι η σ.κ. των X_n

$$G(u)=P(X_n \le u) = P(U_n+D_n \le u)$$

Υποθέταμε ότι η G είναι απεριοδική

και $0<E[U_n]<\infty$, $0<E(D_n)<\infty$

Ν.δ.ο. $\lim_{t\to\infty} P[I(t)=1] = \underbrace{\frac{E[U_1]}{E(U_1)+E(D_1)}}$

μακροπρόθεσμο

ποσοστό χρόνου λειτ.
του συστήματος.

<u>Λύση:</u>

$$H(t)=P(I(t)=1)$$

Δεσμεύω ως προς τον χρόνο της $1^{ης}$ ανανέωσης.

$$H(t)=P(I(t)=1)=\int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1=u)\,du$$

Αν $u<t$

$$P(I(t)=1 \mid X_1=u) = P(I(t-u)=1)$$

Αν $u>t$

$$P(I(t)=1 \mid X_1=u) = P(U_1>t \mid S_1=u)$$

Άρα, $H(t)=P(I(t)=1)=\int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1=u)\,du$

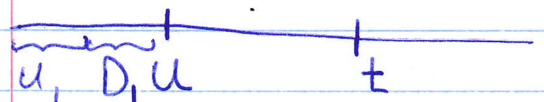
$=\int_0^t P(I(t-u)=1)\,dG(u)+\int_t^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\,dG(u)$

$\Rightarrow H(t)=(H*G)(t)+\underbrace{\int_t^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\,dG(u)}_{D(t)}$

$D(t)=\int_t^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\,dG(u)=$

$=\int_0^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\,dG(u)-\int_0^t \cancelto{0}{P(U_1>t \mid X_1=u)}\,dG(u)$

$=P(U_1>t)$



Άρα, $D(t)=P(U_1>t)$

Άρα, $H(t)=D(t)+(H*G)(t)$

$D(t)$ φθίνουσα

$0\le D(t)=P(U_1>t)\le 1$

Η $D(t)=D(t)-0$ είναι διαφορά δύο

μη-αρνητικών, μονότονων και φραγμ. συν.

$\int_0^\infty |D(t)|\,dt=\int_0^\infty D(t)\,dt=\int_0^\infty P(U_1>t)\,dt=E(U_1)<\infty$

Άρα, οι προϋποθέσεις του Β.Α.Θ. ικανοποιούνται

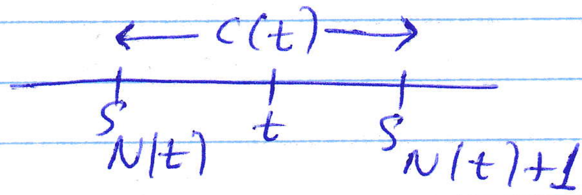
$$\lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{E[U_1]+E[D_1]} = \frac{EU_1}{EU_1+ED_1}$$

μακρ. πιθ. λειτ. του συσ. = ποσοστό χρ. λειτ. του συσ.

<u>Άσκηση</u> (Οριακός Μέσος t-εξαρτώμενος χρόνος)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ απεριοδική RP με ενδ. χρόνους ανανέωσης $\{X_n, n \geq 1\}$ με σ.κ. G, μ.τ. $0 < E(X_n) = \tau < \infty$ και $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty$

Νδο $\lim_{t\to\infty} E(c(t)) = \frac{\sigma^2+\tau^2}{\tau}$.

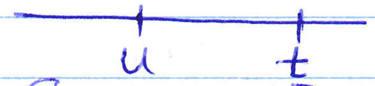


Λύση

Έστω $H(t)=E[C(t)]$. Δεσμεύοντας ως προς S_1 έχουμε

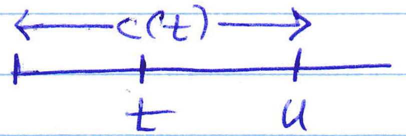
$$H(t)=E[C(t)]=\int_0^\infty E[C(t)|S_1=u]\,dG(u)$$

Αν $u\le t$



$$E[C(t)|S_1=u]=E[C(t-u)]$$

Αν $u>t$



$$E[C(t)|S_1=u]=u$$

Άρα, $H(t)=\int_0^t E[C(t-u)]\,dG(u)+\int_t^\infty u\,dG(u) \Rightarrow$

$$H(t)=\underbrace{\int_0^t H(t-u)\,dG(u)}_{(H*G)(t)}+\underbrace{\int_t^\infty u\,dG(u)}_{D(t)}$$

Η $D(t)$ είναι μη-αρνητική, φθίνουσα και

$$0\le D(t)=\int_t^\infty u\,dG(u)\le\int_0^\infty u\,dG(u)=\tau$$

$D(t)=D(t)-0$ γράφεται σαν διαφορά δύο μη αρνητικών, μονότονων και φραγμένων

$$\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty u\, dG(u)dt$$

$$\underline{0<t<u<\infty} \quad \int_0^\infty \int_0^u u\, dt\, dG(u) = \int_0^\infty u \underbrace{\int_0^u dt}_{u}\, dG(u)$$

$$= \int_0^\infty u^2 dG(u) = E X^2 = \sigma^2 + \tau^2 < \infty$$

Άρα, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του

ΒΑΘ

Οπότε, $\lim_{t\to\infty} E(C(t)) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)dt}{\tau} = \dfrac{\sigma^2+\tau^2}{\tau} > \tau$

Για μεγάλα t, ο ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης που καλύπτει το t είναι κατά μ.ο. μεγαλύτερος από τον μέσο ενδ. χρόνο ανανέωσης.

<u>Άσκηση 6 - Φυλλάδιο</u>

$H(t) = E[N^2(t)],\ t \geq 0$

α) Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση

β) Νδο $H(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u)$

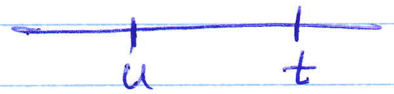
Λύση

$H(t)=E(N^2(t))$

Δεσμεύουμε ως προς το χρόνο του $1^{ης}$ γεγ.

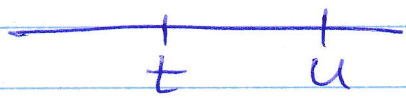
$$H(t)=E(N^2(t))=\int_0^\infty E(N^2(t)\mid S_1=u)\,dG(u)$$

Αν $u\le t$



$$E[N^2(t)\mid S_1=u]=E[(1+N(t-u))^2]=$$
$$E(1+2N(t-u)+N^2(t-u)]=$$
$$1+2\underbrace{E(N(t-u))}+\underbrace{E(N^2(t-u))}=$$
$$1+2M(t-u)+H(t-u)$$

Αν $u>t$



$$E(N^2(t))=0$$

Άρα, $H(t)=\int_0^t(1+2M(t-u)+H(t-u))dG(u)$
$+\int_t^\infty 0\,dG(u)\Rightarrow H(t)=\int_0^t dG(u)+2\int_0^t M(t-u)dG(u)$
$+\int_0^t H(t-u)dG(u)$

$$\Rightarrow H(t)=\underbrace{G(t)+2(M*G)(t)}+(H*G)(t)$$

Όμως, $M(t)=G(t)+(M*G)(t)$

Άρα, $H(t) = G(t) + 2M(t) - G(t) + (H*G)(t)$

$$\Rightarrow H(t) = \underbrace{2M(t) - G(t)}_{D(t)} + (H*G)(t)$$

Ανανεωτική εξίσωση με $D(t) = 2M(t) - G(t)$

β) Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης:

$$H(t) = D(t) + (D*M)(t) \Rightarrow$$

$$H(t) = 2M(t) - G(t) + \int_0^t \left[2M(t-u) - G(t-u)\right] dM(u)$$

$$\Rightarrow H(t) = 2M(t) - G(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u) - \int_0^t G(t-u)\, dM(u) \Rightarrow$$

$$H(t) = 2M(t) - G(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u) - (G*M)(t) \Rightarrow$$

$$H(t) = 2M(t) - \cancel{G(t)} + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u) - M(t) + \cancel{G(t)}$$

$$H(t) = M(t) + 2\int_0^t M(t-u)\, dM(u)$$