

## Στοχαστικές Ανελιξίες Ασκήσεις στις Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

**Άσκηση 1.** Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μία Μ.Α.Δ.Χ με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων  $S$ . Να δείξετε ότι οι εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j p_{ji} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i p_{ij}, \quad A \subseteq S$$

είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις πλήρους ισορροπίας

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}, \quad j \in S.$$

Να δώσετε μια διαισθητική ερμηνεία για τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας.

**Άσκηση 2.** Θεωρούμε 2 κάλπες: A και B. Οι δύο κάλπες μαζί περιέχουν  $N$  σφαιρίδια. Σε κάθε βήμα κάνουμε το εξής πείραμα τύχης: Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα  $N$  σφαιρίδια και το τοποθετούμε στην κάλπη A με πιθανότητα  $p$  ή στην κάλπη B με πιθανότητα  $q = 1 - p$ , ανεξάρτητα από που το πήραμε. Έστω  $X_n$  είναι ο αριθμός σφαιριδίων στην κάλπη A μετά το  $n$ -οστό βήμα.

- (α) Να δείξετε ότι η  $\{X_n, n \geq 0\}$  είναι Μ.Α.Δ.Χ και να βρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης  $P$ .
- (β) Να δείξετε ότι η  $\{X_n, n \geq 0\}$  είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική.
- (γ) Να βρείτε τη στάσιμη κατανομή.
- (δ) Να βρείτε το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν  $i$  σφαιρίδια στην κάλπη A,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ .

**Άσκηση 3.** Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μία Μ.Α.Δ.Χ με χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  με

$$p_{0j} = \begin{cases} r_0 & , j = 0, \\ p_0 & , j = 1, \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$p_{ij} = \begin{cases} q_i & , j = i - 1, \\ r_i & , j = i, \\ p_i & , j = i + 1, \\ 0 & , \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για  $i \geq 1$ , όπου  $p_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  και  $q_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$

- (α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η  $\{X_n, n \geq 0\}$  να είναι θετικά επαναληπτική.
- (β) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

**Άσκηση 4.** Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μία Μ.Α.Δ.Χ με χώρο καταστάσεων  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P$  με

$$p_{ij} = \begin{cases} q & , j = 0, \\ p & , j = i + 1, \\ 0 & , \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για  $i \geq 0$ , όπου  $p > 0$  και  $q = 1 - p$ .

- (α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η  $\{X_n, n \geq 0\}$  να είναι θετικά επαναληπτική.
- (β) Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή.

**Άσκηση 5.** Έστω  $\{X_n, n \geq 0\}$  μία Μ.Α.Δ.Χ με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων  $S$ . Έστω  $A \subseteq S \setminus \{0\}$ . Έστω  $f_A$  η πιθανότητα η Μ.Α.Δ.Χ να επισκεφθεί κάθε κατάσταση του συνόλου A πριν επισκεφθεί την κατάσταση 0 για πρώτη φορά. Να γράψετε ένα σύνολο εξισώσεων για τον υπολογισμό της πιθανότητας  $f_A$ .