

Στοχαστικές Ανελιξίες Ασκήσεις στην Ανανεωτική Θεωρία

Στις παρακάτω ασκήσεις θεωρούμε ότι έχουμε ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$, με ενδιάμεσους χρόνους που είναι συνεχείς τ.μ. και έχουν συνάρτηση κατανομής $G(t)$, μέση τιμή $E[X_n] \in (0, \infty)$ και διασπορά $Var[X_n] \in [0, \infty)$.

Άσκηση 1. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης X_n , $n \geq 1$, που έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Να υπολογίσετε την $P(N(t) = k)$ για $k = 0, 1, 2, \dots$.

Άσκηση 2. Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $E[S_{N(t)+k}]$, $k \geq 1$, και έπειτα να λυθεί.

Άσκηση 3. Θεωρούμε τη διαδικασία $\{N_p(t), t \geq 0\}$ που δημιουργείται ως εξής: Κάθε γεγονός της αρχικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$ καταγράφεται με πιθανότητα p ή αγνοείται με πιθανότητα $1 - p$, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο και $N_p(t)$ είναι ο αριθμός των καταγεγραμμένων γεγονότων μέχρι τη στιγμή t . Είναι η $\{N_p(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία; Να υπολογιστεί ο LST της $M_p(t) = E[N_p(t)]$ συναρτήσει του $\tilde{G}(s)$ και του p .

Άσκηση 4. Να βρείτε μία ανανεωτική εξίσωση για την $P(A(t) \leq x)$ και να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow \infty} P(A(t) \leq x)$.

Άσκηση 5. Εφαρμόζοντας ανανεωτικό επιχείρημα να βρείτε εξίσωση για την $P(N(t) \text{ περιττός}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(N(t) = 2i + 1)$. Είναι η εξίσωση που προέκυψε ανανεωτική εξίσωση; Να λυθεί η εξίσωση αν η $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι $PP(\lambda)$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(t) = E[N^2(t)]$, $t \geq 0$.

(α) Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$.

(β) Να αποδειχθεί ότι $H(t) = M(t) + 2 \int_0^t M(t-u) dM(u)$.