

## Στοχαστικές Ανελιξίες Ασκήσεις στη Διαδικασία Poisson

**Άσκηση 1.** Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Αν  $Z = \min\{X_1 + X_2, X_3\}$ , να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της  $Z$ .

**Άσκηση 2.** Ο χρόνος ζωής μιας μηχανής ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ . Ένας επιθεωρητής περνά κάθε  $T$  χρονικές μονάδες και ελέγχει τη μηχανή, ξεκινώντας τη στιγμή 0, όπου  $T > 0$  σταθερά. Αν  $X$  η χρονική στιγμή που ο επιθεωρητής βρίσκει τη μηχανή χαλασμένη και  $Y$  το χρονικό διάστημα που είναι χαλασμένη μέχρι να το καταλάβει ο επιθεωρητής, να βρεθούν οι  $E[X]$  και  $E[Y]$ .

**Άσκηση 3.** Το σύστημα A αποτελείται από 2 συσκευές παράλληλα συνδεδεμένες με χρόνους ζωής ανεξάρτητους και εκθετικά κατανομημένους με παράμετρο  $\lambda$ . Το σύστημα B αποτελείται από 1 συσκευή με χρόνο ζωής εκθετικά κατανομημένο με παράμετρο  $\mu$ . Να βρεθεί η πιθανότητα να χαλάσει το σύστημα A πριν το σύστημα B.

**Άσκηση 4.** Έστω  $\{N(t), t \geq 0\}$  μία διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Να βρεθεί η  $P(N(t) = k | N(t+s) = k+m)$ , για  $s, t \geq 0, k, m \geq 0$ .

**Άσκηση 5.** Πελάτες φθάνουν σε σύστημα εξυπηρέτησης με  $s$  υπηρέτες σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανομημένοι με παράμετρο  $\mu$ . Τη στιγμή 0, όλοι οι υπηρέτες είναι απασχολημένοι και κανένας πελάτης δεν βρίσκεται σε αναμονή.

(α) Να βρεθεί η πιθανότητα ο επόμενος πελάτης που θα φθάσει να βρει όλους τους υπηρέτες απασχολημένους.

(β) Αν  $N$  είναι ο αριθμός των αφίξεων πριν την πρώτη εξυπηρέτηση, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ.  $N$ .

(γ) Να βρεθεί η πιθανότητα ο επόμενος πελάτης που θα φθάσει να βρει τουλάχιστον 2 ελεύθερους υπηρέτες.

**Άσκηση 6.** Πελάτες φθάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή και τη διασπορά του αριθμού των πελατών που φθάνουν στη τράπεζα σε διάστημα 8 ωρών.

(β) την πιθανότητα κατά τη διάρκεια ενός διαλείμματος που διαρκεί 15 λεπτά να φθάσουν στην τράπεζα πάνω από 4 πελάτες.

(γ) τον συντελεστή συσχέτισης του αριθμού των πελατών που φθάνουν μεταξύ 9:00 και 11:00 με τον αριθμό των πελατών που φθάνουν μεταξύ 10:00 και 12:00.

**Άσκηση 7.** Πελάτες φθάνουν σε τράπεζα σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 10 πελάτες την ώρα. Το 40% των πελατών είναι γυναίκες, οι υπόλοιποι άντρες. Δεδομένου ότι 10 άντρες έφθασαν σε διάστημα μίας ώρας, να βρείτε τον μέσο αριθμό γυναικών που έφθασαν την ίδια ώρα.