

Εφερηση 3 (Πρόβλημα των σειράδων)

Έχουμε ένα γεγονότο που επιτυχεί με πιθανότητα p . Εάν επιτυχεί, τότε το συνολικό αριθμό των επιτυχειών θα αυξανόται καθημερινά κατά 1. Εάν δεν επιτυχεί, τότε το συνολικό αριθμό των επιτυχειών θα μείνει το ίδιο.

Ας ονομάσουμε R την άνοιξη την οποία θα πάρει η σειρά από την πρώτη επιτυχείων.

$$E[R] = ?$$

Λύση

Έστω Z_i το γήινθος των τοπικών βιων λογαρίθμων για την i -ημέρα.

$$Z_1 = \sum_{i=1}^n I_i \quad \text{όπου} \quad I_i = \begin{cases} 1 & , \text{αν } \sigma_i \text{ πήρε το κανόνιο} \\ 0 & , \text{διαφορετικό} \end{cases}$$

$$E[I_i] = \frac{1}{n}$$

$$E[Z_1] = E\left[\sum_{i=1}^n I_i\right] = \sum_{i=1}^n E[I_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$$E[Z_2 | Z_1]$$

$$\text{Για } k \neq n, E[Z_2 | Z_1 = k] = E\left[\sum_{i=1}^{n-k} I_i\right] = (n-k) \cdot \frac{1}{n-k} = 1 \Rightarrow$$

$$E[Z_2 | Z_1] = 1 \quad \text{για } Z_1 < n$$

Συνεπώς, $E[Z_i | Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}] = 1$ ουτός ο όρος ισούται με $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{i-1} \leq n$.

Για να δούμε πόσα είναι τα X_n , θα πάρουμε την προσθήκη $\sum_{i=1}^n (Z_i - E[Z_i | Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}])$.

Είναι μερικό μέρος μεταναστευτικής σειράς, οπότε $X_n = \sum_{i=1}^n (Z_i - E[Z_i | Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}])$ είναι martingale.

$$\text{Ομως } X_R = \begin{cases} \sum_{i=1}^R (Z_i - 1) & , R \leq n \\ \sum_{i=1}^n (Z_i - 1) & , R > n \end{cases}$$

O R ειναι κρίσιμος μάρκος για την $\{Z_n, n \geq 1\}$.

Av λεξίγια στo Stopping Theorem, θe ισχύει

$$E[X_R] = E[X_1] = E[Z_1 - 1] = E[Z_1] - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$E\left[\underbrace{\sum_{i=1}^R Z_i}_{n} - R\right] = 0 \Rightarrow n - E[R] = 0 \Rightarrow E[R] = n$$

Μένει ν.Σ.ο λεξίγιαν κώνοις σε γεράκια.

$E[R] < \infty$ (επειδή n MAX των Z_i είναι ηδαία ζευγάρια σε αντίθετη σειρά που δεν είναι μεταξύ τους και παρατητική σειρά ανεξάρτητης)

$$E[|X_{k+1} - X_k| | Z_1, Z_2, \dots, Z_k] = E[|Z_{k+1} - 1| | Z_1, Z_2, \dots, Z_k] \leq$$

$$E[\underbrace{|Z_{k+1}|}_{\leq n} | Z_1, Z_2, \dots, Z_k] + 1 \leq n + 1.$$

