Εφαρμογή 3 (Πρόβλημα του ταιριάσματος)

Έχουμε n ζεύγη αντικειμένων (π.χ. άνθρωπος-καπέλο)

Σε κάθε γύρο γίνεται τυχαία αντιστοιχία και τα σωστά ζεύγη φεύγουν.

R = # γύρων μέχρι να φύγουν όλα τα ζεύγη.

$E[R] = ?$

Λύση

Έστω Z_i το πλήθος των ταιριασμάτων στον i-οστό γύρο.

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \text{όπου} \quad I_i = \begin{cases} 1 & , \text{αν ο } i \text{ πήρε το καπέλο του} \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$E[I_i] = \frac{1}{n}$$

$$E[Z_1] = E\left[\sum_{i=1}^{n} I_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[I_i] = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

$$E[Z_2 | Z_1]$$

Για $k \neq n$, $E[Z_2 | Z_1 = k] = E\left[\sum_{i=1}^{n-k} I_i\right] = (n-k) \cdot \frac{1}{n-k} = 1 \Rightarrow$

$$E[Z_2 | Z_1] = 1 \quad \text{για} \quad Z_1 < n$$

Γενικά, $E[Z_i | Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}] = 1$ αν $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{i-1} \leq n$

Γνωρίζουμε ότι η $\{X_k, k \geq 1\}$ με

$$X_k = \sum_{i=1}^{k} \left(Z_i - E[Z_i | Z_1, Z_2, \dots, Z_{i-1}]\right) \text{ είναι martingale.}$$

Όμως

$$X_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} (Z_i - 1) & , k \leq R \\ \sum_{i=1}^{R} (Z_i - 1) & , k > R \end{cases}$$

Ο R είναι χρόνος Markov για την $\{Z_n, n\geq 1\}$.

Αν ισχύει το Stopping Theorem, θα πάρουμε

$$E[X_R] = E[X_1] = E[Z_1 - 1] = E[Z_1] - 1 = 1-1 = 0 \Rightarrow$$

$$E\Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{R} Z_i}_{n} - R\Big] = 0 \Rightarrow n - E[R] = 0 \Rightarrow$$

$$E[R] = n$$

Μένει ν.δ.ο ισχύουν κάποιες συνθήκες.

$E[R] < \infty$ (επειδή η ΜΑΔΧ που δείχνει πόσα έχουν βρει το καπέλο τους έχει πεπ. # καταστάσεων και μοναδική κατ. επαναφοράς)

$$E[|X_{k+1} - X_k| \,|\, Z_1, Z_2, \dots, Z_k] = E[|Z_{k+1} - 1| \,|\, Z_1, Z_2, \dots, Z_k] \leq$$

$$E[\underbrace{|Z_{k+1}|}_{\leq n} \,|\, Z_1, Z_2, \dots, Z_k] + 1 \leq n+1.$$