Εφαρμογή 2

Ένα κελί περιέχει αρχικά ένα λευκό και ένα μαύρο σφαιρίδιο. Σε κάθε βήμα, ένα σφαιρίδιο επιλέγεται τυχαία από το κελί και μετά επανατοποθετείται σε αυτό με ένα σφαιρίδιο ίδιου χρώματος. Έστω Z_n το ποσοστό των λευκών σφαιριδίων μετά το n-οστό βήμα. Να αποδείξετε ότι η $\{Z_n, n\geq 1\}$ είναι martingale.

Λύση

Το κελί αρχικά έχει 2 σφαιρίδια.

Μετά το $1^{ο}$ βήμα θα έχει 3 σφαιρίδια.

» $2^{ο}$ » » » 4 σφαιρίδια.

⋮

» $n^{ο}$ » » $n+2$ σφαιρίδια.

Έστω $Z_n = i$, τότε ο # λευκών σφαιριδίων μετά το n-οστό βήμα θα είναι $i\cdot(n+2)$.

Επίσης,

$$Z_{n+1} \mid Z_n = i = \begin{cases} \dfrac{i(n+2)+1}{n+3}, & \text{με πιθ } i \\[2ex] \dfrac{i(n+2)}{n+3}, & \text{με πιθ } 1-i \end{cases}$$

Θ.δ.ο η $\{Z_n, n\geq 1\}$ martingale.

(i) $E[|Z_n|] < \infty$ διότι $Z_n \in (0,1)$, $\forall n = 1,2,\ldots$

(ii) $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] = E[Z_{n+1} \mid Z_n]$

Έχουμε $E[Z_{n+1} \mid Z_n = i] = \dfrac{i(n+2)+1}{n+3}\cdot i + \dfrac{i(n+2)}{n+3}(1-i) =$

$$\frac{i(n+2)}{n+3}\cdot i + \frac{1}{n+3}\cdot i + \frac{i(n+2)}{n+3}(1-i) = \frac{i(n+2)}{n+3} + \frac{1}{n+3}\cdot i =$$

$$\frac{i\,(n+3)}{n+3} = i$$

Άρα $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots, Z_n] = E[Z_{n+1} \mid Z_n] = Z_n$.

(iii) Η Z_{n+1} είναι συνάρτηση της Z_n.