Εφαρμογή 1

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με $S = \mathbb{N}$ και πιθ. μετάβασης

$p_{ij} = \frac{e^{-1}}{(j-i)!}$ για $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $j = i, i+1, i+2, \ldots$ και $E[X_0] < \infty$.

Ν.Δ.Ο η $\{Y_n, n \geq 0\}$ με $Y_n = X_n - n$, $n = 0, 1, \ldots$ είναι Martingale ως προς $\{X_n, n \geq 0\}$.

Λύση

(ii) $E[Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots X_n] = E[X_{n+1} - (n+1) \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] \overset{\text{Markov}}{\underset{\text{ιδιοτ.}}{=}}$

$E[X_{n+1} \mid X_n] - (n+1)$

Θα υπολογίσω την

$$E[X_{n+1} \mid X_n = i] = \sum_{j=i}^{\infty} j \cdot p_{ij} = \sum_{j=i}^{\infty} j \frac{e^{-1}}{(j-i)!} \underset{k=j-i}{=} \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+i)}{k!} =$$

$$\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} + \frac{i}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{e} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!}}_{= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e} + \frac{i}{e} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!}}_{e^1 = e} =$$

$$\frac{1}{e} \cdot e + \frac{i}{e} \cdot e = i + 1.$$

Άρα $E[X_{n+1} \mid X_n = i] = i + 1 \Rightarrow E[X_{n+1} \mid X_n] = X_n + 1$

Οπότε $E[Y_{n+1} \mid X_0, X_1, \ldots, X_n] = X_n + 1 - n - 1 = X_n - n = Y_n$

(i) $E[|Y_n|] = E[|X_n - n|] \leq E[|X_n|] + n = E[X_n] + n$

Όμως $E[X_n] = E[E[X_n \mid X_{n-1}]] = E[X_{n-1} + 1] = E[X_{n-1}] + 1 \Rightarrow$

$E[X_n] = E[X_{n-2}] + 1 + 1 \Rightarrow E[X_{n-2}] + 2 \Rightarrow \ldots$

$E[X_n] = E[X_0] + n$

Άρα $E[|Y_n|] = E[X_0] + 2n < \infty$

(iii) Η Y_n είναι συνάρτηση της X_n.