Κλασικό Stopping Theorem

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ και T Markov χρόνος για την $\{Y_n, n \geq 0\}$ με

(i) $P(T < \infty) = 1$,

(ii) $E[|X_T|] < \infty$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} E[|X_n| I_{\{T>n\}}] = 0$.

Τότε, $E[X_T] = E[X_0]$

Απόδειξη

$$X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & , n < T \\ X_T & , n \geq T \end{cases}$$

Τότε $X_{T\wedge n} = X_{T\wedge n} I_{\{T \leq n\}} + X_{T\wedge n} I_{\{T>n\}} \Rightarrow$

$X_{T\wedge n} = X_T I_{\{T\leq n\}} + X_n I_{\{T>n\}}$

Οπότε, $X_T = X_T I_{\{T\leq n\}} + X_T I_{\{T>n\}} \Rightarrow$

$X_T = X_{T\wedge n} - X_n I_{\{T>n\}} + X_T I_{\{T>n\}}$.

Όμως $\lim_{n\to\infty} E[X_n I_{\{T>n\}}] = 0$ (προκύπτει από την (iii))

και $\lim_{n\to\infty} E[X_T I_{\{T>n\}}] = 0$ (από υπόθ (ii) & Λήμμα 3)

Άρα $\underbrace{E[X_{T\wedge n}]}_{= E[X_0]\ \forall n} \xrightarrow{n\to\infty} E[X_T] \Rightarrow E[X_{T\wedge n}] = E[X_T] \Rightarrow$

$E[X_0] = E[X_T]$

Πόρισμα

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T Markov time με $P(T<\infty)=1$.

Αν ισχύει ένα από τα παρακάτω

(i) $\exists$ σταθερά c : $P(T\leq c)=1$,

(ii) $\exists$ σταθερά c : $|X_n|\leq c$ $\forall n$,

(iii) $E[T]<\infty$ & $\exists$ σταθερά c : $E[|X_{n+1}-X_n| \,|\, Y_0, Y_1, \dots, Y_n]\leq c$ $\forall n\leq T$

τότε $E[X_T]=E[X_0]$.

Συνοψίζοντας

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T χρόνος Markov ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$ με $P(T<\infty)=1$.

Αν ισχύει ένα από τα παρακάτω

(i) $E[\sup_n |X_{T\wedge n}|]<\infty$

(ii) $E[|X_T|]<\infty$ & $\lim_{n\to\infty} E[|X_n| I_{\{T>n\}}]=0$

(iii) $\exists$ c : $P(T\leq c)=1$

(iv) $\exists$ c : $|X_n|\leq c$ $\forall n$

(v) $E[T]<\infty$ & $\exists$ c : $E[|X_{n+1}-X_n| \,|\, Y_0, Y_1, \dots, Y_n]\leq c$ $\forall$ $n\leq T$,

τότε $E[X_T]=E[X_0]$

Τα παραπάνω λένε ότι σε ένα δίκαιο παιχνίδι (martingale) αν ο παίκτης χρησιμοποιήσει ένα stopping time σαν κριτήριο για να αποχωρήσει από το παιχνίδι, αν ισχύει μία από τις συνθήκες (i)-(v), τότε η αναμενόμενη τελική του περιουσία $E[X_T]$ θα είναι ίση με την αρχική περιουσία $E[X_0]$.