Λήμμα 3

Αν W τ.μ με $E[|W|]<\infty$ και T τ.μ. με $P(T<\infty)=1$ $\Big\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[W I_{\{T>n\}}]=0$

Θεώρημα (Optimal Stopping Theorem για κυριαρχημένα Martingales)

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T χρόνος Markov για την $\{X_n, n\geq 0\}$. Αν

(i) $P(T<\infty)=1$,

(ii) $E[\sup_n |X_{T\wedge n}|]<\infty$.

τότε $E[X_T]=E[X_0]$.

Απόδειξη

Έστω $\sup_n |X_{T\wedge n}| = W$

$$E[|X_T|] = E\Big[\Big|\sum_{k=0}^{\infty} X_k I_{\{T=k\}}\Big|\Big]$$

$$= E\Big[\Big|\sum_{k=0}^{\infty} X_{T\wedge k} I_{\{T=k\}}\Big|\Big] \leq$$

$$= E\Big[\sum_{k=0}^{\infty} |X_{T\wedge k}| I_{\{T=k\}}\Big] \leq$$

$$E\Big[\sum_{k=0}^{\infty} W I_{\{T=k\}}\Big] = E[W]<\infty$$

$$E[|X_{T\wedge n}-X_T|] = E[|(X_{T\wedge n}-X_T) I_{\{T>n\}}|] \leq$$

$$E[\{|X_{T\wedge n}|+|X_T|\} I_{\{T>n\}}] \leq 2E[W I_{\{T>n\}}] \to 0$$

Άρα $\underbrace{E[X_{T\wedge n}]}_{\substack{= \\ E[X_0] \\ \text{σταθερό}}} \to E[X_T]$. Οπότε $E[X_{T\wedge n}] = E[X_T]$

Άρα $$\left.\begin{aligned} E[X_{T\wedge n}] &= E[X_n] \\ E[X_{T\wedge n}] &= E[X_T] \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[X_T] = E[X_0] = E[X_n] \ \forall n.$$