Ερώτημα: Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$.

Άρα $E[X_0] = E[X_1] = \cdots = E[X_n] = \cdots$.

Αν T Markov time ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$, τότε

$$E[X_T] \overset{?}{=} E[X_0].$$

Απάντηση: Γενικά, όχι.

Λήμμα 1:

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T Markov time ως προς $\{X_n, n\geq 0\}$.

Τότε, $E[X_n I_{\{T=k\}}] = E[X_k I_{\{T=k\}}]$ $\forall n\geq k$.

Απόδειξη

$$E[X_n I_{\{T=k\}}] \underset{\text{Μ.Τ.}}{\overset{\text{ιδ. διπλής}}{=\!=\!=}} E\Big[E[X_n \underbrace{I_{\{T=k\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση}\\ \text{των}\\ Y_0, Y_1, \ldots, Y_k}} \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_k]\Big] \underset{\text{εξάρτηση}}{\overset{\text{ιδ. πλήρους}}{=\!=\!=}}$$

$$= E\Big[I_{\{T=k\}} \underbrace{E[X_n \mid Y_0, Y_1, \ldots, Y_k]}_{X_k \text{ (από ιδιότητα martingales)}}\Big] = E[X_k I_{\{T=k\}}]$$

Λήμμα 2

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$ και T Markov time για την $\{X_n, n\geq 0\}$.

Αν
$$X_{T\wedge n} = \begin{cases} X_n & , n\leq T \\ X_T & , n > T \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

τότε $\{X_{T\wedge n}, n\geq 0\}$ είναι martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$.

Απόδειξη

$$X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}.$$

Θα δείξουμε ότι είναι martingale.

(i) $E[|X_{T\wedge n}|] = E[|\sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}|]$

$$\leq E[\sum_{k=0}^{n-1} |X_k| I_{\{T=k\}}] + E[|X_n| I_{\{T\geq n\}}] < \infty \quad \forall n$$

(ii) Θ.δ.ο $E[X_{T\wedge(n+1)} | Y_0, Y_1, \dots, Y_n] = X_{T\wedge n}$.

Έχουμε $E[X_{T\wedge(n+1)} | Y_0, Y_1, \dots, Y_n] =$

$$E[\underbrace{\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, Y_1, \dots, Y_n} + X_{n+1} \underbrace{I_{\{T\geq n+1\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, Y_1, \dots, Y_n} | Y_0, Y_1, \dots, Y_n] =$$

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}} + I_{\{T\geq n+1\}} \underbrace{E[X_{n+1} | Y_0, Y_1, \dots, Y_n]}_{X_n} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n+1\}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + \underbrace{X_n I_{\{T=n\}} + X_n I_{\{T\geq n+1\}}}_{X_n I_{\{T\geq n\}}} = X_{T\wedge n}$$

(iii) Η $X_{T\wedge n} = \sum_{k=0}^{n-1} X_k I_{\{T=k\}} + X_n I_{\{T\geq n\}}$ συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.

Πόρισμα:

Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ και T Markov time για την $\{X_n, n \geq 0\}$, τότε

$$E[X_0] = E[X_{T \wedge n}] = E[X_n] \quad \forall n.$$

Αντίστοιχο πόρισμα για submartingales:

Αν $\{X_n, n \geq 0\}$ submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ και T Markov time για την $\{X_n, n \geq 0\}$, τότε $\{X_{T \wedge n}, n \geq 0\}$ submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$ και

$$E[X_0] \leq E[X_{T \wedge n}] \leq E[X_n], \quad \forall n.$$