Ορισμοί (Χρόνοι Markov & Stopping Time)

Έστω $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ ακολουθία τ.μ. Η τυχαία μεταβλητή T λέγεται **Χρόνος Markov** για την $\{Y_n, n \geq 0\}$ αν το ενδεχόμενο $\{T = n\}$ εξαρτάται από τα $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.

Δηλαδή,

T χρόνος Markov για την $\{Y_n, n \geq 1\} \Leftrightarrow I_{\{T=n\}}$ συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.

Αν, επιπλέον, $P(T < \infty) = 1$, ο T λέγεται **stopping time**.

Παράδειγμα

Έστω $\{Y_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ με χ.κ S και $A \subseteq S$.

Ο $T = \inf\{n \geq 0 : Y_n \in A\}$ είναι χρόνος Markov για την $\{Y_n, n \geq 0\}$ αφού

$$\{T = n\} = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} \notin A, Y_n \in A\}.$$

Ιδιότητες χρόνων Markov

Έστω $\{Y_n, n \geq 0\}$ ακολουθία τ.μ. Ισχύουν τα παρακάτω:

1) T χρόνος Markov για $\{Y_n, n \geq 0\} \Leftrightarrow$

$\{T \leq n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, Y_1, \dots, Y_n \Leftrightarrow$

$\{T > n\}$ » » » »

2) T χρόνος Markov για $\{Y_n, n \geq 0\} \Leftrightarrow$

$\{T < n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} \Leftrightarrow$

$\{T \geq n\}$ » » » »

3) Αν S, T χρόνοι Markov για $\{Y_n, n \geq 0\}$ $\Rightarrow$

- $S+T$ χρόνος Markov για $\{Y_n, n \geq 0\}$
- $\min\{S,T\} = S \wedge T$ χρόνος Markov για $\{Y_n, n \geq 0\}$
- $\max\{S,T\} = S \vee T$ χρόνος Markov για $\{Y_n, n \geq 0\}$

<u>Απόδειξη</u>

1) ($\Rightarrow$) Είναι $I_{\{T \leq n\}} = \sum_{k=0}^{n} I_{\{T=k\}}$.

Εφόσον T χρόνος Markov $\Rightarrow$ $I_{\{T=k\}}$ συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$.

Άρα $I_{\{T \leq n\}} = \sum_{k=0}^{n} I_{\{T=k\}}$ είναι συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.

Οπότε το $\{T \leq n\}$ εξαρτάται από τις $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$.

($\Leftarrow$) $I_{\{T=n\}} = \underbrace{I_{\{T \leq n\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, Y_1, \dots, Y_n} - \underbrace{I_{\{T \leq n-1\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}}$ συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$

$\Rightarrow$ T Markov time ως προς $\{Y_n, n \geq 0\}$.

2) ομοίως

3) $I_{\{S+T=n\}} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{I_{\{T=k\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, \dots, Y_k} \underbrace{I_{\{S=n-k\}}}_{\text{συνάρτηση των } Y_0, \dots, Y_{n-k}}$ συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ $\Rightarrow$

$S+T$ χρόνος Markov.

$$I\{S\wedge T>n\} = \underbrace{I_{\{S>n\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των} \\ Y_0, Y_1, \dots, Y_n}} \cdot \underbrace{I_{\{T>n\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των} \\ Y_0, Y_1, \dots, Y_n}}$$

συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ $\Rightarrow$

$S\wedge T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$.

$$I\{S\vee T\leq n\} = \underbrace{I_{\{S\leq n\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των} \\ Y_0, \dots, Y_n}} \underbrace{I_{\{T\leq n\}}}_{\substack{\text{συνάρτηση} \\ \text{των} \\ Y_0, \dots, Y_n}}$$

συνάρτηση των $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ $\Rightarrow$

$S\vee T$ χρόνος Markov ως προς $\{Y_n, n\geq 0\}$.