Ιδιότητες Martingales

Έστω $\{X_n, n \geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$.

Ισχύουν τα παρακάτω:

1) $E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots$

2) Αν φ κυρτή με $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$, τότε η $\{\varphi(X_n), n \geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$.

3) $E[X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = X_n$

4) Αν g συνάρτηση, $E[g(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n) X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \cdot X_n$

Απόδειξη

1) Θ.δ.ο $E[X_{n+1}] = E[X_n]$, $n = 1, 2, \dots$.

$$E[X_{n+1}] \underset{\text{μέσης τιμής}}{\overset{\text{ιδ. διπλής}}{=}} E\Big[\underbrace{E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{X_n}\Big] = E[X_n].$$

2) Για ν.δ.ο $\{\varphi(X_n), n \geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$, αρκεί ν.δ.ο i) $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$ $\forall n$ (ισχύει από υπόθεση)

ii) $E[\varphi(X_{n+1}) \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \geq \varphi(X_n)$

(έχουμε $E[\varphi(X_{n+1}) \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \underset{\text{αν. Jensen}}{\overset{\varphi \text{ κυρτή}}{\geq}} \varphi\Big(\underbrace{E[X_{n+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{X_n}\Big) = \varphi(X_n)$)

[ανισότητα Jensen: αν φ κυρτή $\Rightarrow \varphi(E[X]) \leq E[\varphi(X)]$ $\forall$ τ.μ X]

iii) $\varphi(X_n)$ είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

(εφόσον $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$, θα είναι η X_n συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.
Άρα και η $\varphi(X_n)$ θα είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$)

3) Για $k=1$ ισχύει, αφού $\{X_n, n\geq 1\}$ martingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$.
Έστω ότι ισχύει έως k. Θ.Σ.Ο ισχύει για $k+1$.
Έχουμε $E[X_{n+k+1} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \underset{\text{πύργου}}{\overset{\text{ιδιότητα}}{=\!=}}$

$$E\Big[\underbrace{E[X_{n+k+1} \mid Y_1, Y_2, \dots Y_{n+k}]}_{X_{n+k}} \,\Big|\, Y_1, Y_2, \dots, Y_n\Big] =$$

$$E[X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \underset{\text{υποθ.}}{\overset{\text{επαγ.}}{=\!=}} X_n .$$

Ολοκληρώθηκε η επαγωγή.

4) $$E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{\text{περιεχομενική}}{=\!=}}$$

$$g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \underbrace{E[X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n]}_{X_n} \overset{\text{απο ιδ. 3)}}{=\!=}$$

$$g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \cdot X_n$$

Ιδιότητες submartingales

Έστω $\{X_n, n\geq 1\}$ είναι submartingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$.
Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1) $E[X_1] \leq E[X_2] \leq E[X_3] \leq \cdots$

2) Αν φ κυρτή και αύξουσα συνάρτηση και $E[|\varphi(X_n)|] < \infty$ $\forall n$, τότε $\{\varphi(X_n), n\geq 1\}$ submartingale ως προς $\{Y_n, n\geq 1\}$.

3) $E[X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \geq X_n$

4) Αν g μη αρνητική συνάρτηση, τότε

$$E[g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) X_{n+k} \mid Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \geq g(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \cdot X_n .$$