Martingales

Υπενθύμιση: Δεσμευμένη Μέση Τιμή & Ιδιότητες

Αν (X,Y) τ.μ. (συνεχής ή διακριτή) τότε

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad , \text{για } y: f_Y(y)>0 \, ,$$

$$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x f_{X|Y}(x|y) & , \text{αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,dx & , \text{αν } X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

↳ είναι αριθμός που εξαρτάται από το y

$E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$: τυχαία μεταβλητή, συνάρτηση της Y

↳ ελαχιστοποιεί την $E[(X-g(Y))^2]$

δηλ. είναι η συνάρτηση της Y που βρίσκεται πιο "κοντά" στην τ.μ. X.

Ιδιότητες

1. Διπλή μέση τιμή : $E[X] = E[E[X|Y]]$
2. Πλήρης εξάρτηση : αν $X = g(Y) \Rightarrow E[X|Y] = X$
3. Ιδιότητα ανεξαρτησίας: αν X,Y ανεξ $\Rightarrow E[X|Y] = E[X]$
4. Γραμμικότητα : $E[a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n|Y] = a_1E[X_1|Y] + a_2E[X_2|Y] + \dots + a_nE[X_n|Y]$
5. Αν $X \geq 0 \Rightarrow E[X|Y] \geq 0$
6. Ιδιότητα πύργου : $E[X|Z] = E[E[X|Y,Z]|Z]$

7. Παραγοντική : $E[g(Z)X|Z] = g(Z)E[X|Z]$

8. Επεκτεταμένη ανεξαρτησία: Z ανεξ. των $X, Y \Rightarrow$

$$E[X|Y,Z] = E[X|Y]$$

<u>Ορισμός</u> (Martingales, Submartingales, Supermartingales)

Έστω $\{Y_1, Y_2, Y_3, \dots\}$ ακολουθία τ.μ.

- Η ακολουθία $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ είναι <u>martingale</u> ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν

  (i) $E[|X_n|] < \infty$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (ii) $E[X_{n+1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n] = X_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (iii) Το X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

- Η ακολουθία $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ είναι <u>submartingale</u> ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν

  (i) $E[|X_n|] < \infty$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (ii) $E[X_{n+1} | Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \geq X_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (iii) Το X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

- Η ακολουθία $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ είναι <u>supermartingale</u> ως προς $\{Y_n, n \geq 1\}$ αν

  (i) $E[|X_n|] < \infty$ $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (ii) $E[X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] \leq X_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$

  (iii) Το X_n είναι συνάρτηση των $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $\forall n = 1,2,3,\dots$