4.6. Αντιστροφή ΜΑΣΧ και αντιστρεψιμότητα

Ορισμός (Αντίστροφη ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t)\}$ αδιαχώριστη ΜΑΣΧ με χ.κ. S, πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q = [q_{ij}]_{i,j \in S}$, στάσιμη κατανομή $p = [p_i]_{i \in S}$ και αρχική κατανομή την στάσιμη. Έστω $\hat{X}(t) = X(t_0 - t)$, όπου t_0 σταθερή χρονική στιγμή. Τότε, η $\{\hat{X}(t)\}$ λέγεται αντίστροφη της $\{X(t)\}$ ως προς την στιγμή t_0, είναι ΜΑΣΧ με στάσιμη κατανομή την $\hat{p} = [\hat{p}_i]_{i \in S} = [p_i]_{i \in S}$ και πίνακα ρυθμών μετάβασης $\hat{Q} = [\hat{q}_{ij}]_{i,j \in S}$ όπου

$$p_i \hat{q}_{ij} = p_j q_{ji} \iff \hat{q}_{ij} = \frac{p_j q_{ji}}{p_i}$$

Ορισμός (Αντιστρέψιμη ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S και πίνακα ρυθμών μετάβασης Q. Η $\{X(t)\}$ είναι <u>αντιστρέψιμη</u> αν οι $\{X(t)\}$ και $\{\hat{X}(t)\}$ είναι στοχαστικά ισοδύναμες $\iff$

$$q_{ij} = \hat{q}_{ij} \quad \forall\, i,j \in S \iff$$

$$q_{ij} = \frac{p_j q_{ji}}{p_i} \quad \forall\, i,j \in S \iff$$

$$p_i q_{ij} = p_j q_{ji} \quad \forall\, i,j \in S$$ (εξισώσεις λεπτομερούς ισορροπίας)

Θεώρημα (κριτήριο Αντιστρεψιμότητας Kolmogorov)

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ. S και πίνακα ρυθμών μετάβασης Q. Η $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη αν

$\forall$ κύκλο καταστάσεων $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, i_0$ ισχύει

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdot \ldots \cdot q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n i_0} = q_{i_0 i_n} \cdot q_{i_n i_{n-1}} \cdot \ldots \cdot q_{i_2 i_1} \cdot q_{i_1 i_0} .$$