4.5. Στάσιμη κατανομή

Ορισμός (Στάσιμη κατανομή)

Έστω $\{X(t), t\geq 0\}$ Μ.Α.Σ.Χ. με χ.κ. S και πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q=[q_{ij}]_{i,j\in S}$. Τότε ένα διάνυσμα $p=[p_i]_{i\in S}$ με $p_i\geq 0$, $i\in S$, λέγεται *στάσιμο μέτρο* της $\{X(t), t\geq 0\}$ αν

$$p_j q_j = \sum_{i\neq j} p_i q_{ij} \quad , j\in S \qquad \text{(εξισώσεις ισορροπίας)}.$$

Αν, επιπλέον,

$$\sum_{j\in S} p_j = 1 \qquad \text{(εξίσωση κανονικοποίησης)},$$

τότε η $p=[p_j]_{j\in S}$ λέγεται *στάσιμη κατανομή*.

Θεώρημα (Βασικό Θεώρημα Οριακής Συμπεριφοράς Αδιαχώριστων ΜΑΣΧ)

Έστω $\{X(t), t\geq 0\}$ αδιαχώριστη ΜΑΣΧ με χ.κ. S και πίνακα ρυθμών μετάβασης $Q=[q_{ij}]_{i,j\in S}$.

Τότε η $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική αν και μόνο αν έχει στάσιμη κατανομή $p=[p_i]_{i\in S}$.

Ακόμη, αν έχει στάσιμη κατανομή $p=[p_i]_{i\in S}$, τότε είναι μοναδική και $p_i>0$, $i\in S$, και αν $\lambda=[\lambda_i]_{i\in S}$ στάσιμο μέτρο με $\sum_{i\in S}\lambda_i<\infty$ τότε $\lambda=cp$, $c\in\mathbb{R}$.

Επιπλέον,

χρόνος στο $(0,t)$ που η αλυσίδα βρίσκεται στην j

i) $$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}\, du}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην } j} = p_j \quad \text{με πιθ. } 1 \quad , j\in S$$

ii) $$\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u)=j\}}\,du\right]}{t}} = p_j \quad , j \in S$$

↳ μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην j.

iii) Θεωρώ ως γεγονότα τις επισκέψεις στην j

m_j = μέσος ενδιάμεσος χρόνος γεγονότων

$1/q_j$ = μέσος χρόνος παραμονής στην j μεταξύ 2 γεγονότων

p_j = ποσοστό χρόνου που μένει στην j

$$p_j = \frac{1/q_j}{m_j} \iff p_j = \frac{1}{q_j m_j}$$

(iv) $$c\text{-}\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_j(u)\,du}{t} \overset{(*)}{=} p_j \quad , j \in S$$

$$(*) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t P(X(U_t)=j \mid U_t=u)\, f_{U_t}(u)\,du \quad \text{με}$$

$f_{U_t}(u) \to \frac{1}{t}$

$U_t \sim \text{Uniform}([0,t])$ ανεξ. της $\{X(t), t\geq 0\}$

πιθανότητα, αν πάρω ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα και επιλέξω τυχαία στιγμή του διαστήματος, να είναι στην j.

Επίσης, $$c\text{-}\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t p_{ij}(u)\,du}{t} = p_j \quad , j \in S.$$

(v) $$\underbrace{\lim_{t\to\infty} P_j(t)}_{\text{↳ οριακή πιθανότητα της } j} = p_j \quad , j \in S$$

πιθανότητα, αν πάρω ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, στο τέλος να είμαι στην j.

Επίσης, $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j \quad , i,j \in S$

(vi) Αν $p(0) = p \Rightarrow p(t) = p$