4.3. Πιθανότητες και Μέσοι Χρόνοι 1ης εισόδου

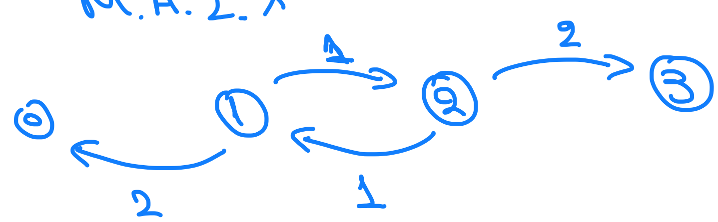
Ορισμοί

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ Μ.Α.Σ.Χ. με χ.κ. S και πίνακα ρυθμών μετάβασης Q. Αν $C \subseteq S$, ορίζουμε τα ακόλουθα:

- $T_C = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in C\}$: χρόνος 1ης εισόδου στο C
- $h_i(C) = P_r(T_C < \infty \mid X(0) = i)$, $i \in S$: πιθανότητα εισόδου στο C ξεκινώντας από την i.
- $m_i(C) = E[T_C \mid X(0) = i]$, $i \in S$: μέσος χρόνος 1ης εισόδου στο C ξεκινώντας από την i.

Παράδειγμα 2

Έστω Μ.Α.Σ.Χ $\{X(t), t \geq 0\}$ με ρυθμών μετάβασης



Θεωρούμε ότι αρχικά το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση 1.

(α) Πιθανότητα να απορροφηθεί στην 3 $= h_1(\{3\}) = ?$

(β) Μέσος χρόνος απορρόφησης στην 3 ή την 0 $= m_1(\{0,3\}) = ?$

Λύση

(α) Θα κάνω ανάλυση 1ου βήματος για τις $h_i(\{3\}), i \in S$.

$$h_0(\{3\}) = 0 \quad (1), \quad h_3(\{3\}) = 1 \quad (2)$$

$$h_1(\{3\}) = \frac{1}{3} h_2(\{3\}) + \frac{2}{3} h_0(\{3\}) \qquad P_{10} = \frac{q_{10}}{q_1} = \frac{2}{3}$$

$$P_{12} = \frac{q_{12}}{q_1} = \frac{q_{12}}{q_{12}+q_{10}} = \frac{1}{3}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad h_1(\{3\}) = \frac{1}{3} h_2(\{3\}) \qquad (3)$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{3} h_1(\{3\}) + \frac{2}{3} h_3(\{3\}) \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow}$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} h_2(\{3\}) + \frac{2}{3} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\frac{8}{9} h_2(\{3\}) = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$h_2(\{3\}) = \frac{3}{4} \qquad (4)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Longrightarrow} h_1(\{3\}) = \frac{1}{4}$$

(β) Θα κάνω ανάλυση 1ου βήματος για τις $m_i(\{0,3\})$,
$i=0,1,2,3$.

$$m_0(\{0,3\}) = 0 \quad (1),$$

$$m_3(\{0,3\}) = 0 \quad (2),$$

$$m_1(\{0,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_2(\{0,3\}) + \frac{2}{3} m_0(\{0,3\}) \overset{(1)}{\Longrightarrow}$$

$$m_1(\{0,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_2(\{0,3\}) \qquad \frac{q_{12}}{q_1} \qquad (3),$$

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_{12}+q_{10}} = \frac{1}{3}$$

$$m_2(\{0,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_1(\{0,3\}) + \frac{2}{3} m_3(\{0,3\}) \overset{(3),(2)}{\Longrightarrow}$$

$$m_2(\{0,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} m_2(\{0,3\})\right) + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{8}{9} m_2(\{0,3\}) = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$m_2(\{0,3\}) = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

(3) $\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $m_1(\{0,3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.