Θεώρημα

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική Μ.Α.Δ.Χ με χ.κ. S, αρχική κατανομή $\pi^{(0)}=[\pi_i^{(0)}]_{i\in S}$, στάσιμη κατανομή $\pi=[\pi_i]_{i\in S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P.

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j$ και $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $\forall i,j\in S$.

Απόδειξη

Θεωρούμε 2 ανεξάρτητες Μ.Α.Δ.Χ. Η πρώτη είναι η $\{X_n, n\geq 0\}$ και η άλλη είναι η $\{Y_n, n\geq 0\}$ με αρχική κατανομή την π και πίνακα πιθ. μετάβασης P. Είναι και οι δύο απεριοδικές και θετικά επαναληπτικές.

Έστω T η στιγμή που θα συναντηθούν για πρώτη φορά, δηλαδή $T=\inf\{n\geq 0: X_n = Y_n\}$.

Βήμα 1º: Θ.δ.ο $P(T<\infty)=1$.

Η $\{(X_n, Y_n), n\geq 0\}$ είναι Μ.Α.Δ.Χ. με χ.κ $S\times S$.

Τότε $P(T<\infty) = P($ η $\{(X_n,Y_n), n\geq 0\}$ να επισκεφθεί το $\{(i,i), i\in S\}$ σε πεπερασμένο χρόνο$)$

Η $\{(X_n, Y_n), n\geq 0\}$ έχει αρχική κατανομή

$$\pi_{X,Y}^{(0)}(i,j) = P(X_0 = i, Y_0 = j) = P(X_0=i)\cdot P(Y_0=j) = \pi_i^{(0)}\cdot \pi_j,$$

έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P_{X,Y} = [p_{(i,j),(k,\ell)}]_{(i,j),(k,\ell)\in S^2}$$

με
$$p_{(i,j),(k,\ell)} = P(X_{n+1}=k, Y_{n+1}=\ell \mid X_n=i, Y_n=j) = P(X_{n+1}=k\mid X_n=i)\, P(Y_{n+1}=\ell\mid Y_n=j)$$
$$= p_{ik}\cdot p_{j\ell},$$

και στάσιμη κατανομή $\pi_{X,Y} = [\pi_{X,Y}(i,j)]_{(i,j)\in S^2}$

με $\pi_{X,Y}(i,j) = \pi_i \cdot \pi_j$.

Πράγματι, η $\pi_{X,Y}$ είναι στάσιμη κατανομή, αφού

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_{X,Y}(i,j)\cdot P_{(i,j),(k,\ell)} = \pi_{X,Y}(k,\ell) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_i \pi_j P_{ik} P_{j\ell} = \pi_k \pi_\ell \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i\in S} \pi_i P_{ik} \underbrace{\sum_{j\in S} \pi_j P_{j\ell}}_{\pi_\ell} = \pi_k \pi_\ell \Leftrightarrow$$

$$\pi_\ell \underbrace{\sum_{i\in S} \pi_i P_{ik}}_{\pi_k} = \pi_k \pi_\ell \checkmark$$

και $\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_{X,Y}(i,j) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_i \pi_j = 1 \Leftrightarrow$

$$\sum_{i\in S} \pi_i \underbrace{\sum_{j\in S} \pi_j}_{1} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{i\in S} \pi_i}_{1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \checkmark$$

Η $\{(X_n,Y_n), n\geq 0\}$ είναι και αδιαχώριστη.

Πράγματι, εφόσον $\{X_n, n\geq 0\}$ απεριοδική και αδιαχώριστη,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : P_{ik}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Επίσης, εφόσον $\{Y_n, n\geq 0\}$ απεριοδική και αδιαχώριστη,

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : P_{j\ell}^{(n)} > 0 \quad \forall n \geq n_1$.

Άρα $\forall\, n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ισχύει

$$P_{(i,j),(k,\ell)}^{(n)} = P_{ik}^{(n)} \cdot P_{j\ell}^{(n)} > 0 .$$ Άρα η $\{(X_n,Y_n), n\geq 0\}$

είναι αδιαχώριστη.

Εφόσον η $\{(X_n,Y_n), n\geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη και έχει στάσιμη κατανομή, θα είναι θετικά επαναληπτική.

Άρα $P(T<\infty) = P($ η $\{(X_n, Y_n), n\geq 0\}$ να εισέλθει στο $\{(i,i), i\in S'\}$ σε πεπερασμένο χρόνο$) = 1$.

<u>Βήμα 2ο</u>

Ορίζουμε μια νέα στοχαστική διαδικασία, την $Z_n = \begin{cases} X_n, & n<T \\ Y_n, & n\geq T \end{cases}$

Η $\{Z_n, n\geq 0\}$ είναι Μ.Α.Δ.Χ με αρχική κατανομή την $\pi^{(0)}$ και π.π.μ τον P. Άρα ταυτίζεται με την $\{X_n, n\geq 0\}$.

<u>Βήμα 3ο</u> Θ.δ.ο. $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j$

$$|\pi_j^{(n)} - \pi_j| = |P(X_n = j) - P(Y_n = j)|$$

$$= |P(Z_n=j) - P(Y_n=j)|$$

$$= |\cancel{\underbrace{P(Z_n=j, T\leq n)}_{=P(Y_n=j, T\leq n)}} + P(Z_n=j, T>n) - \cancel{P(Y_n=j, T\leq n)} - P(Y_n=j, T>n)|$$

$$= |P(Z_n=j, T>n) - P(Y_n=j, T>n)|$$

$$\leq P(Z_n=j, T>n) + P(Y_n=j, T>n)$$

$$\leq P(T>n) + P(T>n) = 2P(T>n) \to 0$$

Άρα $|\pi_j^{(n)} - \pi_j| \to 0$ για $n\to\infty$, οπότε $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j$.

Για ν.δ.ο $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$ αρκεί να ξεκινήσω από την κατάσταση i, δηλ. $\pi^{(0)} = [0, 0, 0, \dots, \underset{\pi_i^{(0)}}{1}, \dots 0, 0]$. Τότε

$$\pi_j^{(n)} = \sum_{k\in S} \pi_k^{(0)} p_{kj}^{(n)} = \underbrace{\pi_i^{(0)}}_{=1} p_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)}$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \pi_j \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$