Θεώρημα

Αν η $\{X_n, n\geq 0\}$ είναι αδιαχώριστη Μ.Α.Δ.Χ., τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) κάθε κατάσταση της $\{X_n, n\geq 0\}$ είναι θετικά επαναληπτική.

(ii) Μία κατάσταση είναι θετικά επαναληπτική.

(iii) $\exists$ στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i\in S}$.

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) προφανές

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $i\in S$ θετικά επαναληπτική

$\Rightarrow$ i επαναληπτική

$\xRightarrow[\text{αδιαχ.}]{\{X_n, n\geq 0\}}$ $\forall\, j\in S$ επαναληπτική.

$\Rightarrow \exists\, m^{(i)}$ με $m_i^{(i)} = 1$

$m^{(i)}$ στάσιμο μέτρο

$0 < m_j^{(i)} < \infty \quad, \forall\, j\in S$

Επίσης, εφόσον i θετικά επαναληπτική,

$$m_i = E[T_i \mid X_0 = i] < \infty$$

$$m_i = \underline{\sum_{k\in S} m_k^{(i)}} < \infty$$

Οπότε, η $\pi = [\pi_j]_{j\in S}$ με $\pi_j = \dfrac{m_j^{(i)}}{\sum_{k\in S} m_k^{(i)}}$

είναι στάσιμη κατανομή.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι $\exists$ στάσιμη κατανομή $\pi = [\pi_i]_{i\in S}$.

Θα δείξω ότι k θετικά επαναληπτική, $\forall\, k\in S$.

Εφόσον $\pi = [\pi_i]_{i\in S}$ στάσιμη, ικανοποιεί την

εξίσωση κανονικοποίησης, άρα $\sum_{i\in S}\pi_i = 1$ και $\pi_i \geq 0 \;\forall i\in S$.

Άρα $\exists\, i\in S : \pi_i > 0$.

Εφόσον $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη , $i \leftrightarrow k$.

Άρα $\exists\ n > 0 :\ p_{ik}^{(n)} > 0$.

Επίσης $\pi = \pi P \Rightarrow \pi = \pi P^n \Rightarrow \pi_k = \sum_{j \in S} \pi_j p_{jk}^{(n)} \geq \pi_i p_{ik}^{(n)} > 0$

Άρα $\pi_k > 0$.

Οπότε , το διάνυσμα $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_i = \frac{\pi_i}{\pi_k}$, $i \in S$,

είναι στάσιμο μέτρο με $\lambda_k = 1$.

Γνωρίζουμε ότι αν $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη με στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_k = 1$, τότε $m^{(k)} \leq \lambda$.

Άρα , $m_i^{(k)} \leq \lambda_i$, $\forall\ i \in S$.

Οπότε $\underset{\substack{\parallel \\ \text{μέσος χρόνος} \\ \text{επανόδου στην } k \\ \parallel \\ E[T_k \mid X_0 = k]}}{m_k} = \sum_{i \in S} m_i^{(k)} \leq \sum_{i \in S} \lambda_i = \sum_{i \in S} \frac{\pi_i}{\pi_k} = \frac{\sum_{i \in S} \pi_i}{\pi_k} = \frac{1}{\pi_k} < \infty$

$\Rightarrow k$ θετικά επαναληπτική.