Θεώρημα

$\{X_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ. με πεπερασμένο χ.κ. S, πίνακα πιθ. μετάβασης $P = [p_{ij}]$ και για κάποιο $i \in S$ $\exists \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \ \forall j$ $\Rightarrow$ $\pi = [\pi_j]_{j \in S}$ είναι στάσιμη κατανομή της $\{X_n, n \geq 0\}$.

Απόδειξη

Θα δείξω ότι $\pi e = 1 \iff \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ και $\pi \cdot P = \pi \iff \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} = \pi_j, \forall j \in S$.

Έχουμε,
$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)}}_{1} = 1$$

και
$$\sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} = \sum_{k \in S} \lim_{n \to \infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}}_{p_{ij}^{(n+1)}} =$$
$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n+1)} = \pi_j, \quad \forall j \in S$$

Ορισμός (μέσος # επισκέψεων στην i μεταξύ 2 διαδοχικών επισκέψεων στην k)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ. με χ.κ. S και πίνακα πιθ. μετάβασης $P = [p_{ij}]$. Έστω $k \in S$ και $T_k = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ ο χρόνος $1^{ης}$ επίσκεψης στην k. Τότε για $i \in S$,
$$m_i^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k - 1} 1_{\{X_n = i\}} \,\middle|\, X_0 = k\right]$$
είναι ο μέσος # επισκέψεων στην i μεταξύ 2 διαδοχικών επισκέψεων στην k.

Θεώρημα

Έστω $\{X_n, n\geq 0\}$ αδιαχώριστη & επαναληπτική. Έστω $k \in S$ και $m^{(k)} = [m_i^{(k)}]_{i\in S}$. Τότε

(α) $m_k^{(k)} = 1$

(β) $m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο για τον P.

(γ) $m_i^{(k)} > 0$ & $m_i^{(k)} < \infty \quad \forall i \in S$

Απόδειξη

(α) $m_k^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k - 1} 1\{X_n = k\} \mid X_0 = k\right] = 1$

(β) $\{X_n, n\geq 1\}$ επαναληπτική $\Rightarrow h_k = 1 \Rightarrow P[T_k < \infty \mid X_0 = k) = 1$

Έχουμε
$$m_i^{(k)} = E\left[\sum_{n=0}^{T_k-1} 1\{X_n = i\} \mid X_0 = k\right]$$
$$= E\left[\sum_{n=1}^{T_k} 1\{X_n = i\} \mid X_0 = k\right]$$
$$= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = i,\, T_k \geq n\}} \mid X_0 = k\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[1\{X_n = i, T_k \geq n\} \mid X_0 = k\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n = i, T_k \geq n \mid X_0 = k\right)$$
$$\overset{\Theta.O.\Pi}{=} \sum_{j\in S} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$
$$= \sum_{j\in S} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P(X_n = i \mid X_{n-1} = j, X_0 = k, T_k \geq n)}_{P_{ij}} \cdot P(X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$
$$= \sum_{j\in S} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}\, P(X_{n-1} = j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} P(X_{n-1}=j, T_k \geq n \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} P(X_m = j, \underbrace{T_k \geq m+1}_{T_k - 1 \geq m} \mid X_0 = k)$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} \sum_{m=0}^{\infty} E[1_{\{X_m = j, T_k - 1 \geq m\}} \mid X_0 = k]$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} E[\sum_{m=0}^{\infty} 1_{\{X_m = j, T_k - 1 \geq m\}} \mid X_0 = k]$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} \underbrace{E[\sum_{m=0}^{T_k - 1} 1_{\{X_m = j\}} \mid X_0 = k]}_{m_j^{(k)}}$$

$$= \sum_{j\in S} p_{ij} m_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow \quad m_i^{(k)} = \sum_{j\in S} p_{ij} m_j^{(k)}, \quad \forall i \in S \quad \Rightarrow \quad m^{(k)} = m^{(k)} P \Rightarrow$$

$m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο.

(γ) Εφόσον $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη, $k \leftrightarrow i$, $\forall i \in S$.

Άρα $\exists$ n_1, n_2 : $p_{ik}^{(n_1)} > 0$, $p_{ki}^{(n_2)} > 0$.

Έχω

$$1 = \underbrace{m_k^{(k)} = \sum_{j\in S} p_{jk}^{(n_1)} m_j^{(k)}}_{\substack{m^{(k)} = m^{(k)} \cdot P \Rightarrow \\ m^{(k)} = m^{(k)} \cdot P^{n_1}}} \geq p_{ik}^{(n_1)} \cdot m_i^{(k)} \Rightarrow$$

$$m_i^{(k)} \leq \frac{1}{p_{ik}^{(n_1)}} < \infty$$

Επίσης,

$$m_i^{(k)} = \sum_{j\in S} m_j^{(k)} \cdot p_{ji}^{(n_2)} \geq \underbrace{m_k^{(k)}}_{=1} \underbrace{p_{ki}^{(n_2)}}_{>0} > 0 \Rightarrow m_i^{(k)} > 0, \forall i \in S.$$