3.6. Στάσιμη κατανομή

Ορισμός (Στάσιμο μέτρο και στάσιμη κατανομή)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ. με χ.κ. S και πίνακα πιθ. μετάβασης $P = [p_{ij}]$. Ένα $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ λέγεται <u>στάσιμο μέτρο</u> ή <u>μέτρο ισορροπίας</u> της $\{X_n, n \geq 0\}$ αν

$$\lambda P = \lambda \iff$$

$$\sum_{i \in S} \lambda_i p_{ij} = \lambda_j \quad , j \in S \quad \text{(εξισώσεις πλήρους ισορροπίας)}.$$

Αν, επιπλέον, $\sum_{i \in S} \lambda_i = 1$ (εξίσωση κανονικοποίησης), τότε το λ λέγεται <u>στάσιμη κατανομή</u>.

<u>Σημείωση</u>: Αν ο χ.κ. S είναι πεπερασμένος, δηλαδή ο P είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το λ είναι στάσιμο μέτρο ανν το λ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P με αντίστοιχη ιδιοτιμή το 1.

<u>Θεώρημα</u>:

$\left.\begin{array}{l}\{X_n, n \geq 0\} \text{ Μ.Α.Δ.Χ. με} \\ \text{πεπερασμένο χ.κ. } S \\ \quad |S| = k\end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ στάσιμη κατανομή της $\{X_n, n \geq 0\}$

<u>Απόδειξη</u>

Το $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι δεξί ιδιοδιάνυσμα του P με ιδιοτιμή το 1 αφού $Pe = e \iff \sum_{j \in S} p_{ij} = 1$, $i \in S$.

Άρα, $\exists$ αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στην 1. Έστω $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$, δηλ. $\exists$ λ : $\lambda P = \lambda$.

Τότε, αν $\pi_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum_{j\in S} \lambda_j}$, τότε το $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k]$

είναι στάσιμη κατανομή.

Πράγματι, $\sum_{i\in S} \pi_i = \dfrac{\sum_{i\in S} \lambda_i}{\sum_{j\in S} \lambda_j} = 1$, οπότε ικανοποιείται η εξ. κανονικοποίησης.

Επίσης, $\pi P = \dfrac{\lambda P}{\sum_{j\in S} \lambda_j} = \dfrac{\lambda}{\sum_{j\in S} \lambda_j} = \pi$, οπότε το π είναι στάσιμο μέτρο.

Θεώρημα

$\left.\begin{array}{l} \{X_n, n\geq 0\} \text{ Μ.Α.Δ.Χ. με} \\ \text{στάσιμη κατανομή } \pi = [\pi_i]_{i\in S}, \\ \pi^{(0)} = \pi \text{ και πίνακα πιθ.} \\ \text{μετάβασης } P \end{array}\right\} \Rightarrow \pi^{(n)} = \pi, \; n \geq 0.$

Απόδειξη

Εφόσον π στάσιμη κατανομή, $\pi P = \pi$ & $\pi e = 1$.

Τότε, $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n = \pi P^n = \underbrace{\pi P}_{\pi} \cdot P^{n-1} = \pi P^{n-1} = \underbrace{\pi P}_{\pi} \cdot P^{n-2} = \pi P^{n-2} = \dots \Rightarrow$

$\pi^{(n)} = \pi$