<u>Θεώρημα</u> (Χαρακτηρισμός επαναληπτικότητας / παροδικότητας)

(α) j επαναληπτική $\iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

(β) j παροδική $\iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$

<u>Απόδειξη</u>

(α) ($\Rightarrow$) j επαναληπτική $\Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 1$

$\Rightarrow E[N_j(\infty) \mid X_0 = j] = \infty$

$$\boxed{N_j(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n = j\}}}$$

$\Rightarrow E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} \mid X_0 = j\right] = \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

$\overset{+p_{jj}^{(0)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$

(β) ($\Rightarrow$) j παροδική $\Rightarrow P(N_j(\infty) = k) = h_j^k (1-h_j)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow E[N_j(\infty) \mid X_0 = j] < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$

$\overset{+p_{jj}^{(0)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$

<u>Θεώρημα</u> (Επαναληπτικότητα / Παροδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης επικοινωνίας)

(α) i επαναληπτική & $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ επαναληπτική

(β) i παροδική & $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ παροδική.

<u>Απόδειξη</u>

(α) Έστω i, j με $i \leftrightarrow j$ και i επαναληπτική.

Τότε $\exists\ m, n$: $p_{ji}^{(m)} > 0$ και $p_{ij}^{(n)} > 0$

Επίσης, $\forall\ r = 0, 1, 2, \dots$ ισχύει

$$p_{jj}^{(m+r+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)}.$$

Εφόσον i επαναληπτική $\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} = \infty$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+r+n)} \geq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(n)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(m+r+n)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=m+n}^{\infty} p_{jj}^{(r)} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} = \infty \Rightarrow j \text{ επαναληπτική}$$

(β) Έστω i παροδική και $i \leftrightarrow j$.

Τότε $\exists\, m, n : p_{ji}^{(m)} > 0$ και $p_{ij}^{(n)} > 0$

και $\forall\, r = 0, 1, 2, \ldots$

$$p_{ii}^{(m+r+n)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)}.$$

Εφόσον i παροδική $\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow$

$$\sum_{r=m+n}^{\infty} p_{ii}^{(r)} < \infty \Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+r+m)} < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)} \leq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(m+r+n)} < \infty \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)} < \infty \Rightarrow$$

$$p_{ij}^{(n)} \left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} \right) p_{ji}^{(m)} < \infty \Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} < \infty \Rightarrow$$

j παροδική.

Ορισμός

Μια κλάση επικοινωνίας καλείται επαναληπτική (περοδική) αν όλες οι καταστάσεις σε αυτή είναι επαναληπτικές (περοδικές).