## 3.2. Μεταβατική κατανομή

**Βασικοί Ορισμοί**

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. $S$, αρχική κατανομή $\pi^{(0)} = [\pi_i^{(0)}]_{i \in S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = [p_{ij}]_{i,j \in S}$.

Ορίζουμε τα ακόλουθα:

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i), \quad i,j \in S$ : πιθανότητα μετάβασης n-οστής τάξης

$P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]_{i,j \in S}$ : πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης n-οστής τάξης

$\pi_i^{(n)} = P(X_n = i), \; i \in S$ : μεταβατική πιθανότητα n-οστής τάξης

$\pi^{(n)} = [\pi_i^{(n)}], \; i \in S$ : μεταβατική κατανομή n-οστής τάξης

$m_{ij}^{(n)} = E\left[ \begin{array}{l} \text{\# επισκέψεων στην } j \\ \text{στα πρώτα } n \text{ βήματα} \end{array} \Big| X_0 = i \right], \quad i,j \in S$

$M^{(n)} = [m_{ij}^{(n)}], \; i,j \in S$

**Θεώρημα** (Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov)

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} \cdot p_{rj}^{(n-k)}, \quad i,j \in S$$

όπου $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$.

Ισοδύναμα, $P^{(n)} = P^{(k)} \cdot P^{(n-k)}, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}$.

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_n = j \mid X_0 = i) \\
&\overset{\text{Θ.Ο.Π}}{=} \sum_{r \in S} P(X_n = j \mid X_k = r, X_0 = i) \cdot P(X_k = r \mid X_0 = i) \\
&\overset{\text{Μαρκ. Ιδιότ.}}{=} \sum_{r \in S} P(X_n = j \mid X_k = r) \cdot p_{ir}^{(k)} \\
&\overset{\text{ομογ.}}{=} \sum_{r \in S} P(X_{n-k} = j \mid X_0 = r) \, p_{ir}^{(k)} \\
&= \sum_{r \in S} p_{rj}^{(n-k)} \cdot p_{ir}^{(k)} \\
&= \sum_{r \in S} p_{ir}^{(k)} \cdot p_{rj}^{(n-k)} \\
&= (i \text{ γραμμή του } P^{(k)}) \times (j \text{ στήλη του } P^{(n-k)})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P^{(n)} = P^{(k)} \cdot P^{(n-k)}$$

<u>Θεώρημα:</u> $P^{(n)} = P^n$

Απόδειξη: Με επαγωγή. $P^{(0)} = I = P^0$. Επίσης $P^{(1)} = P = P^1$.

Άρα ισχύει για $n=0$ & $n=1$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $k \geq 1$,

οπότε $P^{(k)} = P^k$ (1). Τότε,

$$P^{(k+1)} \overset{C-K}{=\!=} P^{(1)} \cdot P^{(k)} \overset{(1)}{=\!=} P \cdot P^k = P^{k+1}$$

Ισχύει για $k+1$.

Άρα για κάθε $n \geq 0$ ισχύει ότι $P^{(n)} = P^n$.