Άσκηση (Οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ απεριοδική ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης $X_n, n \geq 1$ με σ.κ. G, μ.τ. $0 < E[X_n] = \tau < \infty$ και $Var[X_n] = \sigma^2 < \infty$.

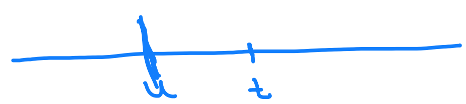
Ν.δ.ο
$$\lim_{t \to \infty} E[B(t)] = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\tau}.$$

Λύση:

Έστω $H(t) = E[B(t)]$.

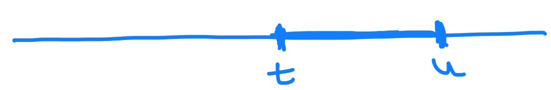
Δεσμεύοντας ως προς S_1 παίρνουμε
$$H(t) = \int_0^\infty E[B(t) \mid S_1 = u] \, dG(u)$$

Αν $u \leq t$,



$$E[B(t) \mid S_1 = u] = E[B(t-u)] = H(t-u)$$

Αν $u > t$



$$E[B(t) \mid S_1 = u] = u - t$$

Οπότε
$$H(t) = \int_0^\infty E[B(t) \mid S_1 = u] \, dG(u) \Rightarrow$$
$$H(t) = \underbrace{\int_0^t H(t-u) \, dG(u)}_{(H * G)(t)} + \underbrace{\int_t^\infty (u-t) \, dG(u)}_{= \int_t^\infty (1 - G(u)) \, du} \Rightarrow$$
$$H(t) = \underbrace{\int_t^\infty (1 - G(u)) \, du}_{D(t)} + (H * G)(t)$$

Η $H(t)$ ικανοποιεί μια ανανεωτική εξίσωση με
$$D(t) = \int_t^\infty (1 - G(u)) \, du.$$

$$D(t) = \underbrace{D(t)}_{D_1(t)} - \underbrace{0}_{D_2(t)}$$

Η $D(t)$ είναι μη αρνητική και μονότονη

Επίσης

$$0 \le D(t) = \int_t^\infty (1-G(u))\,du \le \int_0^\infty (1-G(u))\,du = \tau < \infty$$

Άρα η $D(t) = D(t) - 0$ γράφεται σαν διαφορά 2 μη-αρνητικών, μονότονων & φραγμένων συναρτήσεων.

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt =$$

$$\int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(u))\,du\,dt \quad \underline{\underline{0 < t < u < \infty}}$$

$$\int_0^\infty \int_0^u (1-G(u))\,dt\,du =$$

$$\int_0^\infty (1-G(u)) \underbrace{\int_0^u 1\,dt}_{u}\,du =$$

$$\int_0^\infty u(1-G(u))\,du = \frac{E[X_n^2]}{2} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2} < \infty$$

Άρα $\int_0^\infty |D(t)|\,dt < \infty$

Οπότε οι προϋποθέσεις του Β.Α.Θ. ικανοποιούνται.

Εφαρμόζοντας Β.Α.Θ.

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{\tau} = \frac{\sigma^2+\tau^2}{2\tau}.$$