2.4. Ανανεωτική Εξίσωση

Ορισμός (Ανανεωτική Εξίσωση)

Αν έχω μία γνωστή συνάρτηση $D(t)$,
μία σ.κ. $G(t)$ με $G(0-)=0$ και $G(\infty)=1$
και μία άγνωστη συνάρτηση $H(t)$, τότε
η εξίσωση

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \Leftrightarrow$$

$$H(t) = D(t) + (H * G)(t)$$

λέγεται ανανεωτική εξίσωση για την $H(t)$.

Σημείωση

- Η ανανεωτική εξίσωση προκύπτει χρησιμοποιώντας ανανεωτικό επιχείρημα, δηλ. δεσμεύοντας στον χρόνο του 1ου γεγονότος.
- Έχουμε δει την ανανεωτική εξίσωση για την $M(t)$:

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u) \Leftrightarrow$$

$$M(t) = G(t) + (M * G)(t)$$

και την ανανεωτική εξίσωση για τον $E[S_{N(t)+1}]$:

$$E[S_{N(t)+1}] = H(t), \quad H(t) = \tau + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) \Leftrightarrow$$

$$H(t) = \tau + (H * G)(t)$$

Θεώρημα (Λύση ανανεωτικής εξίσωσης)

Αν $|D(t)| < \infty$, $\forall\, t \geq 0$, υπάρχει μοναδική λύση της

$$H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$ που δίνεται από την

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM(u) \Leftrightarrow$$

$$H(t) = D(t) + (D * M)(t)$$

όπου η $M(t)$ είναι η ανανεωτική συνάρτηση της ανανεωτικής διαδικασίας με ενδ. χρ. ανανεώσεις που έχουν σ.κ. την $G(t)$.
Επίσης ισχύει $|H(t)| < \infty$, $\forall\, t \geq 0$

Σχέδιο απόδειξης

$$H(t) = D(t) + (H * G)(t)$$

Παίρνουμε LST

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{H}(s)\cdot\tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\cdot\frac{1}{1-\tilde{G}(s)} \qquad \left(\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right)$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\,\frac{1-\tilde{G}(s)+\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s)\left(1+\tilde{M}(s)\right) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tilde{D}(s) + \tilde{D}(s)\cdot\tilde{M}(s)$$

Αναστρέφοντας τον LST παίρνουμε

$$H(t) = D(t) + (D * M)(t) \Rightarrow$$

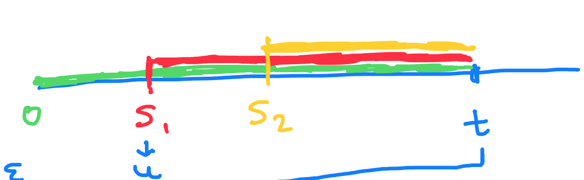
$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\,dM(u).$$

Διαισθητική ερμηνεία ανανεωτικής εξίσωσης και λύσης

$D(t)$: συνολική αμοιβή που έχει αποδοθεί από 1 γεγονός t χρ. μονάδες μετά την εκδήλωσή του.

$H(t)$: συνολική αμοιβή από όλα τα γεγονότα μέσα σε χρόνο t

Υποθέτουμε ότι έχουμε 1 γεγονός τη στιγμή 0 (γεγονός 0) και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ γεγονότων έχουν σ.κ. G.



Τότε

$$\underset{\text{συνολική αμοιβή από όλα τα γεγ. μέχρι την } t}{H(t)} = \underset{\text{συν. αμοιβή μέχρι την } t \text{ του γεγ. } 0}{D(t)} + \int_0^t \underbrace{H(t-u)}_{\text{συνολική αμοιβή από τα γεγονότα στο } [u,t]}\,dG(u)$$

$$H(t) = \underbrace{D(t)}_{\substack{\text{συνολικη αμοιβή} \\ \text{από το γεγ. 0}}} + \underbrace{\int_0^t D(t-u)\, dG(u)}_{\substack{\text{συνολική αμοιβή} \\ \text{από το γεγ 1}}} + \underbrace{\int_0^t D(t-u)\, dG^{*2}(u)}_{\substack{\text{συνολική αμοιβή} \\ \text{από το γεγ. 2}}} + \underbrace{\int_0^t D(t-u)\, dG^{*3}(u)}_{\substack{\text{συνολ. αμοιβή} \\ \text{από το γεγ 3}}} + \cdots$$

$$\Rightarrow H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, d\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} G^{*(k)}(u)}_{M(u)} \Rightarrow$$

$$H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM(u)$$