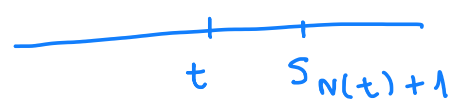
## Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα για $M(t)$

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με $E[X_n] = \tau > 0$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t}}$ $= \frac{1}{\tau} \rightarrow$

μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός ανανεώσεων ή γεγονότων
||
συχνότητα

μέσος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ ανανεώσεων ή γεγονότων
||
περίοδος

### Απόδειξη




$$S_{N(t)+1} > t \Rightarrow$$

$$E[S_{N(t)+1}] > t \Rightarrow \qquad (E[S_{N(t)+1}] = \tau(M(t)+1))$$

$$\tau(M(t)+1) > t \Rightarrow$$

$$M(t) + 1 > \frac{t}{\tau} \Rightarrow$$

$$M(t) > \frac{t}{\tau} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{M(t)}{t} > \frac{1}{\tau} - \frac{1}{t} \Rightarrow$$

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\tau}$$

Αρκεί ακόμη ν.δ.ο $\limsup_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau}$.

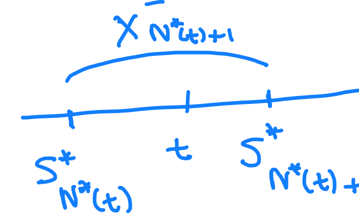
Θεωρούμε σταθερό $T \in (0, \infty)$ και ορίζουμε νέα ακολουθία ενδιάμεσων χρόνων $\{X_n^*, n \geq 0\}$ με

$$X_n^* = \min\{X_n, T\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Έστω $\{N^*(t), t \geq 0\}$ η ανανεωτική διαδικασία, $\{S_n^*, n \geq 1\}$ η ανανεωτική ακολουθία και $M^*(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση που προκύπτει από την $\{X_n^*, n \geq 1\}$ με $E[X_n^*] = \tau^*$

Τότε

$$S^*_{N^*(t)+1} = S^*_{N^*(t)} + X^*_{N^*(t)+1} \leq t + T$$




$$\Rightarrow E[S^*_{N^*(t)+1}] \leq t + T \qquad \left[E[S^*_{N^*(t)+1}] = \tau^*(M^*(t)+1)\right]$$

$$\Rightarrow \tau^*(M^*(t)+1) \leq t + T$$

$$\Rightarrow M^*(t) \leq \frac{t+T}{\tau^*} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{M^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau^*} + \frac{T-\tau^*}{t \cdot \tau^*}$$

Επίσης έχουμε $X^*_n = \min\{X_n, T\} \leq X_n$ , $n \geq 1 \Rightarrow$

$$S^*_n \leq S_n \quad , n \geq 1 \Rightarrow$$

$$N^*(t) \geq N(t) \quad , t \geq 0 \Rightarrow$$

$$E[N^*(t)] \geq E[N(t)] \quad , t \geq 0 \Rightarrow$$

$$M^*(t) \geq M(t) \Rightarrow$$

$$\frac{M^*(t)}{t} \geq \frac{M(t)}{t}$$

Οπότε $\frac{M(t)}{t} \leq \frac{M^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau^*} + \frac{T-\tau^*}{t\cdot\tau^*} \Rightarrow$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau^*}$$

Όμως καθώς $T \to \infty$ , $\tau^* = E[X^*_n] = E[\min\{X_n, T\}] \to E[X_n] = \tau$

οπότε καθώς $T \to \infty$ , έχουμε

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau}$$

Άρα

$$\frac{1}{\tau} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$$