Άσκηση

Αν $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ανανεωτική εξίσωση $M(t)$, ν.δ.ο

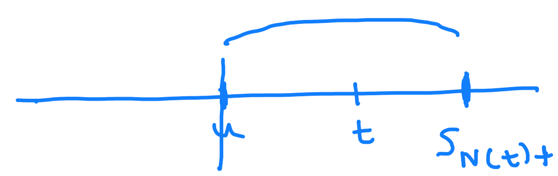
$$\underbrace{E[S_{N(t)+1}]}_{\text{αναμ. χρόνος μέχρι 1ο γεγονός μετά τη στιγμή } t} = \underbrace{\tau}_{\text{μέσος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ γεγονότων}} \underbrace{(M(t)+1)}_{\text{αναμενόμενος \# γεγονότων μέχρι την } t \; +1}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε ανανεωτικό επιχείρημα.

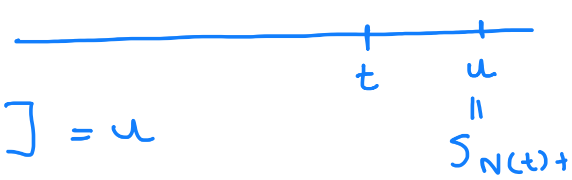
$$H(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dG(u)$$

Αν $u < t$



$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u + E[S_{N(t-u)+1}]$$

Αν $u > t$



$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u$$

$$H(t) = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dG(u)$$

$$= \int_0^t \left[u + E[S_{N(t-u)+1}]\right] dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u)$$

$$= \int_0^t u\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \int_t^\infty u\, dG(u)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty u\, dG(u)}_{\tau} + (H * G)(t)$$

$\Rightarrow \quad H(t) = \tau + (H * G)(t)$

Παίρνω LST

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tilde{H}(s) \cdot \tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tau}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tau \cdot \frac{1}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow \qquad \left(\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right)$$

$$\tilde{H}(s) = \tau \, \frac{1-\tilde{G}(s)+\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tau\left(1 + \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}\right) \Rightarrow$$

$$\tilde{H}(s) = \tau + \tau \tilde{M}(s)$$

Αντιστρέφω τον LST

$$H(t) = \tau + \tau \cdot M(t) \Rightarrow$$

$$H(t) = \tau\,(1 + M(t)) \Rightarrow$$

$$E[S_{N(t)+1}] = \tau\,(M(t)+1)$$

<u>Σημείωση</u>:

ισχύει ότι $E[S_{N(t)+1}] = \tau\,(M(t)+1)$

όμως δεν ισχύει ότι $\underbrace{E[S_{N(t)}] = \tau\, M(t)}_{X}$.