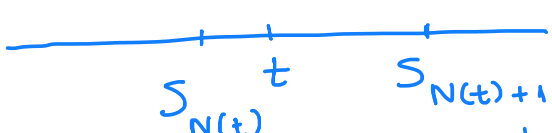
2.2 Ιδιότητες $N(t)$ (συνέχεια)

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l}\{N(t),\, t \geq 0\} \text{ επαναληπτική ανανεωτική διαδικασία} \\ \text{με } E[X_n] = \tau > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau} \quad \text{μ.π.1}$$

Απόδειξη

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$$



χρόνος τελευταίου γεγονότος μέχρι τη στιγμή t

χρόνος 1ου γεγονότος μετά τη στιγμή t

Αν $N(t) > 0$, έχουμε

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \qquad (1)$$

Εφόσον $\{N(t),\, t \geq 0\}$ επαναληπτική, καθώς $t \to \infty$ έχουμε $N(t) \to \infty$.

Οπότε

ισχυρός νόμος μεγάλων αριθμών

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} = E[X] = \tau \quad \text{μ.π.1.}$$

Επίσης

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n+1} X_k}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$= E[X]\cdot 1 = \tau$ με πιθ 1.

Οπότε

$$\frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} \Rightarrow \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \tau$$

Επίσης

$$\frac{t}{N(t)} \geq \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \geq \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \tau$$

Άρα

$$\tau \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} \leq \tau$$

$$\Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \tau$$

Λόγω της συνέχειας της $f(x) = \frac{1}{x}$, για $x>0$, παίρνουμε

ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\tau}$.