ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2022 ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΧΗΜΕΙΑΣ
ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
08-02-2023

Θέμα 1ο: α) Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Λύση: $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$. Θέτουμε $u=\sqrt{x+1}$. Άρα $x+1=u^2 \Leftrightarrow x=u^2-1 \Leftrightarrow dx=2udu$. Το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο $\int \frac{u^2-1}{u}\,2udu = 2\int (u^2-1)du = 2\left(\frac{u^3}{3}-u\right) =$
$= \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{x+1}$.

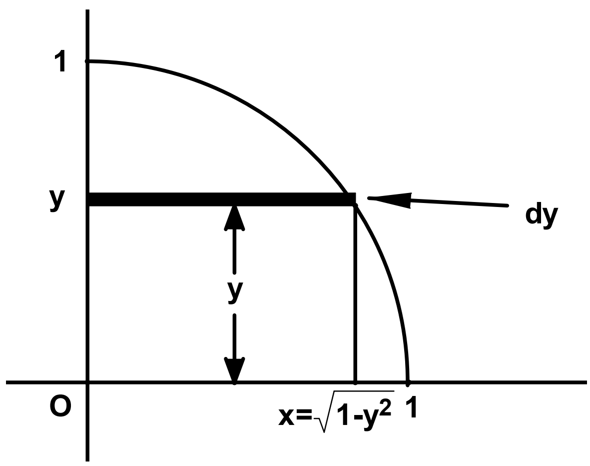
β) Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' - \frac{y}{x} = 3x^3,\ x\in(0,+\infty)$ και $y(1)=3$.

Λύση: Εφόσον θεωρούμε το $x=1>1$, υποθέτουμε ότι $x>0$. Επομένως $e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln(x)} =$
$= e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$. Άρα $y'\cdot\frac{1}{x} - y\cdot\frac{1}{x^2} = 3x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)' = 3x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = x^3 + C \Leftrightarrow y = x^4 + Cx$. Επειδή $3=y(1)=1+C$, έπεται ότι $C=2$. Επομένως $y=x^4+2x$. ■

Θέμα 2ο: Βρείτε τις συντεταγμένες $(\overline{x},\overline{y})$ του κέντρου βάρους του πρώτου τεταρτημορίου του ομογενούς κυκλικού δίσκου με κέντρο το O και ακτίνα 1, δηλαδή του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την καμπύλη $y=\sqrt{1-x^2},\ x\in[0,1]$.

Λύση: Το εμβαδόν Ε είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού κύκλου ακτίνας 1. Άρα $\mathrm{E} = \frac{\pi}{4}$.

Έχουμε $\mathrm{M}_x = \int_0^1 yxdy = \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy = -\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\ d(1-y^2) \underset{u=1-y^2}{=}$
$= -\frac{1}{2}\cdot\int_1^0 \sqrt{u}\ du = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 u^{1/2}\ du = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Επομένως $\overline{y} = \frac{\mathrm{M}_x}{\mathrm{E}} = \frac{1/3}{\pi/4} = \frac{4}{3\pi}$.



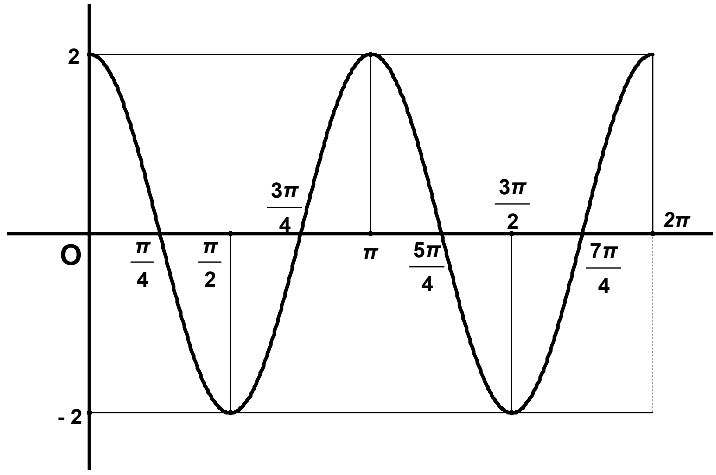
Λόγω συμμετρίας και $\overline{x} = \frac{\mathrm{M}_y}{\mathrm{E}} = \frac{4}{3\pi}$.

Επομένως το κέντρο βάρους είναι το σημείο $\left(\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi}\right)$.

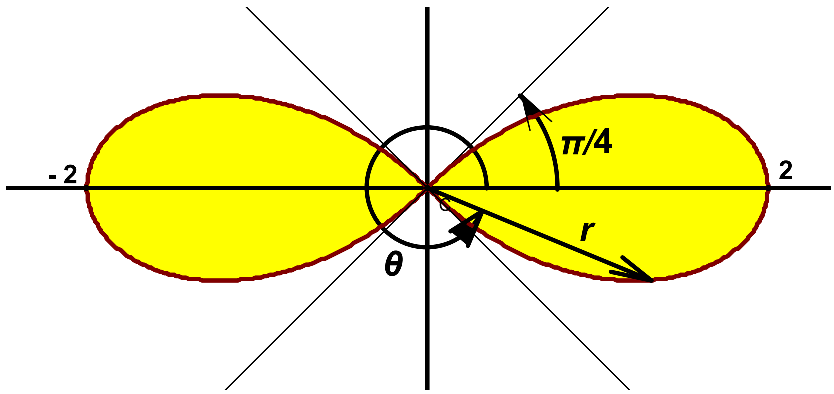
Άλλος τρόπος: $\mathrm{M}_x = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 \left((\sqrt{1-x^2})^2 - 0^2\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. ■

Θέμα 3ο: Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη (σε πολικές συντεταγμένες) $r=2\cos 2\vartheta$, όπου το ϑ ανήκει σε κατάλληλα υποδιαστήματα του $[0,2\pi]$.

Λύση: Η γραφική παράσταση της $y=2\cos 2x$ είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι στα διαστήματα $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ η παράσταση $2\cos 2x$ είναι αρνητική. Επομένως περιοριζόμαστε στα διαστήματα $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right]$ και $\left[\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right]$.
Η γραφική παράσταση της $r = \cos 2\vartheta,\ \vartheta \in [0, 2\pi]$ είναι η ακόλουθη:



Παρατηρούμε ότι το χωρίο αποτελείται από τέσσερα ίσα χωρία που το καθένα αντιστοιχεί στο διάστημα $\vartheta \in \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται λοιπόν με $\mathrm{E} = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2 d\vartheta =$

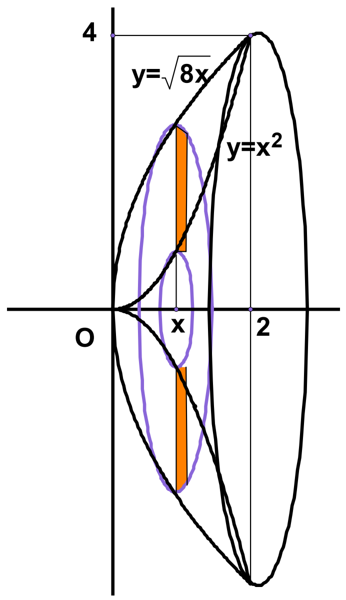
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 4\cos^2 2\vartheta\ d\vartheta = 8\int_0^{\pi/4} \cos^2 2\vartheta\ d\vartheta = 4\int_0^{\pi/4} \cos^2 2\vartheta\ d(2\vartheta) \underset{u=2\vartheta}{=} 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\ du =$$

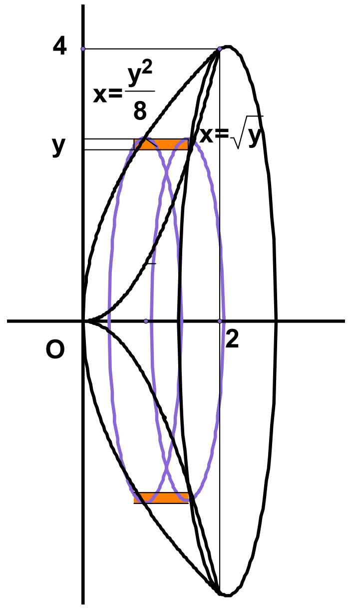
$$= 4 \cdot \left[\frac{u + \cos u \sin u}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$ ■

Θέμα 4°: α) Βρείτε το μήκος της καμπύλης $\vec{r}(t) = (\cos t + \sin t)\vec{\mathbf{i}} + (\cos t - \sin t)\vec{\mathbf{j}},\ t \in [0, 2\pi]$.
β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \sqrt{8x}$.

Λύση: α) $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (-\sin t + \cos t)^2 + (-\sin t - \cos t)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t\cos t +$ $+\sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t = 2$. Το μήκος της καμπύλης ισούται με $\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ dt = 2\pi\sqrt{2}$.

β) $y = x^2 \geq 0$. Επίσης, $x \geq 0$, γιατί βρίσκεται σε ρίζα. Τώρα, $x^2 = \sqrt{8x} \Leftrightarrow x^4 = 8x \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2 + 2x + 4)$. Το τριώνυμο $x^2 + 2x + 4$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Για $x = 0$, $y = 0$, οπότε παίρνουμε το ζεύγος $(0, 0)$. Για $x = 2$, $y = 4$, οπότε παίρνουμε το ζεύγος $(2, 4)$. Με την πρώτη μέθοδο





παίρνουμε $V = \pi \int_0^2 \left((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2\right) dx = \pi \int_0^2 (8x - x^4) dx = \pi \left[4x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi \left(4 \cdot 4 - \frac{32}{5}\right) =$ $= 16\pi \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{48\pi}{5}$. Με τη δεύτερη μέθοδο παίρνουμε

$$V = 2\pi \int_0^4 y \left(\sqrt{y} - \frac{y^2}{8}\right) dy = 2\pi \int_0^4 \left(y^{3/2} - \frac{y^3}{8}\right) dy = 2\pi \left[\frac{2\sqrt{y^5}}{5} - \frac{y^4}{32}\right]_0^4 = 2\pi \left(\frac{64}{5} - \frac{2^8}{2^5}\right) =$$
$$= 2\pi \left(\frac{64}{5} - 8\right) = 16\pi \left(\frac{8}{5} - 1\right) = 16\pi \cdot \frac{3}{5} = \frac{48\pi}{5}.$$

■