Διάλεξη 4/ 1

Σειρές ακολουθιών πραγμ. αριθμών

|||

Αριθμητικές Σειρές

Έστω (a_n), μια ακολ. πραγμ. αριθμών. Τότε ορίζουμε την

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Η (S_n) λέγεται ακολουθία των <u>μερικών αθροισμάτων</u> της (a_n). Ο S_n, λέγεται <u>n-οστό μερικό άθροισμα</u>

- Αν $n \to +\infty$, τότε το άπειρο άθροισμα $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ λέγεται <u>σειρά</u> ή (αριθμητική σειρά), και συμβ. με $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Σύγκλιση της Σειράς

(i) Αν $\lim_n S_n = s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ <u>συγκλίνει</u> με άθροισμα s.

Γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$

(ii) Αν η ακολουθία (S_n) <u>αποκλίνει</u>, τότε λέμε ότι η <u>σειρά</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ <u>αποκλίνει</u>.

Υπάρχει περίπτωση το $\lim_n S_n = +\infty$ (ή $-\infty$), τότε λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ απειρίζεται θετικά (ή αρνητικά)

<u>Σχόλιο</u>: [αποκλίνει στο ~~+∞~~ ή συγκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$)].

Ιδιότητες

Αν $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ και υποθέσουμε ότι

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b$, και $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$

Τότε

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

(iii) $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=1}^{N} a_n = a - S_N$

Θεώρημα

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Αν $a_n \not\to 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ δε συγκλίνει, δηλ. <u>αποκλίνει</u>

Αποδ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = S_{n-1} + a_n.$$

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ συγκλίνει} \Rightarrow S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S \Rightarrow$$

$$\left.S_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} S\right\} \Rightarrow$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0.$$

Παραδείγματα

- Ας πούμε ότι $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = ?$ Παρατηρ. ότι $a_n = 1 + \frac{1}{n} \longrightarrow 1 \neq 0$, $\frac{1}{n} \to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει (αναγκαία συνθήκη ή απαραίτητη προϋπόθεση)

άλλο.

- $a_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει, είναι $a_n \longrightarrow 0$

άρα $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_1 (-1)^n$ αποκλίνει.

Προσοχή !

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλ.

$a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n$ συγκλίνει

[απόκλιση ≡ μη σύγκλιση]

π.χ. $\frac{1}{n}$ ή $\frac{1}{\sqrt{n}}$, τότε η $\sum_n \frac{1}{n} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots \qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots$

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\boxed{\frac{1}{n}} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad (n\geq 2)$$

Αποδεικνύει ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ και επομένως αποκλίνει.

$\frac{1}{n} \to 0$

άρα

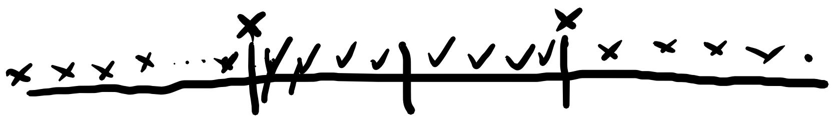
$\frac{1}{n} \to 0$ και $\sum_n a_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Θεώρημα (Γεωμετρική Σειρά)

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = 1+\lambda+\lambda^2+\dots+\lambda^n+\dots$

(i) **συγκλίνει** για $|\lambda|<1$ με άθροισμα $\frac{1}{1-\lambda}$

(ii) αποκλίνει για $|\lambda|\geq 1$.



δηλ. $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 = 2-1 = 1.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2} = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} - 1 = \frac{7}{7} - \frac{3}{7}.$$

$\lambda = -\frac{3}{4}$, δηλ. $|\lambda| = \frac{3}{4} < 1$.

η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $(a_n) \longrightarrow$ γεωμετρική.

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$ αποκλίνει

$\lambda = 2 > 1$

- $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-3^{n-1}}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{5}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 5 - 2\cdot 5}{12} = \frac{15-10}{12} = \frac{5}{12}$$

8

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{7^{n-1}}\right) = 2\cdot 7\cdot \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n}$$

$$= 14\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^{n} - 1 - \frac{2}{7}\right)$$

$$= 14\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{7}} - 1 - \frac{2}{7}\right)$$

$$= 14\cdot\left(\frac{7}{5} - 1 - \frac{2}{7}\right) = 14\cdot\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right)$$

$$= 28\cdot\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = 28\cdot\frac{2}{35} = \frac{8}{5}$$

$35 = 5\cdot 7$, $28 = 4\cdot 7$.

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ (Αρμονική Σειρά).

Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, p-τάξης
(p ∈ ℝ)

συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $p > 1$.

<u>Παραδ.</u>

π.χ. $p = 2$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

γραμμικό

τετραγ.

$n < n^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$.

$\sum \frac{1}{n} > \sum \frac{1}{n^2}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} \ldots$

$\left[\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ συγκλίνει} \Rightarrow a_n \to 0 \\ a_n \to 0 \not\Rightarrow \sum_n a_n \text{ συγκλίνει} \end{array} \right]$

- Αν a_n πηγαίνει "γρήγορα" στο 0 τότε
  $\sum a_n$ συγκλίνει
- Αν a_n πηγαίνει "αργά" στο 0, τότε
  $\sum a_n$ αποκλίνει.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$,

$p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

$p = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

$p = 2$ $\hookrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Αν $p > 1$, τότε
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6} < 2$$

5, 6, 7, 8. 10, 11, 12, .. 15. 17, ...

Τηλεσκοπική σειρά

Μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ λέγεται τηλεσκοπική

αν υπάρχει (b_n) : $a_n = b_n - b_{n+1}, n\geq 1$

Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε θα έχουμε

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}}$$

Παράδειγμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{4n^2-1} = 1.$$

$a_n = \dfrac{2}{4n^2-1} \longrightarrow$ ανάλυση σε απλά κλάσματα

12

$$a_n = \frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

άρα $a_n = b_n - b_{n+1}$, όπου $b_n = \frac{1}{2n-1}$

άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = 1 - 0$

, διότι $\frac{1}{2n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Παραδ.

Να βρεθεί η τιμή της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Τότε $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$a_n = b_n - b_{n+1}$, όπου $\boxed{b_n = \frac{1}{n}}$. $n=1,\ b_1 = 1$

Τελικά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \overset{=1}{b_1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$

13

Παρ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+9n+20} = \frac{1}{5}.$$

$$\frac{1}{n^2+9n+20} = \frac{1}{(n+4)(n+5)} \quad \left(\begin{matrix} x^2 - Sx + P \\ \| \\ (x-x_1)(x-x_2) \end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} = b_n - b_{n+1}, \qquad S = x_1 + x_2, \; P = x_1 x_2.$$

όπου $b_n = \dfrac{1}{n+4}$, $n \geq 1$

Άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \frac{1}{5} - \lim_{n\to\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{n+5}}$

$$= \frac{1}{5}.$$

Κριτήρια Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω $0 \le a_n \le b_n$, $n = 1, 2, \dots$

(i) Αν $\sum_n b_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow$ $\sum_n a_n$ συγκλίνει

(ii) Αν $\underbrace{\sum_n a_n}_{= +\infty}$ αποκλίνει $\Longrightarrow$ $\underbrace{\sum_n b_n}_{= +\infty}$ αποκλίνει.

Παράδ.

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2}$ απειρίζεται θετικά

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \underbrace{\sum_n \frac{1}{n}}_{= +\infty} \le \sum_n \frac{n+1}{n^2}$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n} \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$

$a_n = \frac{1}{n^3+n}$, $\quad \frac{1}{2^3+2} < \frac{1}{2^3}.$

$a_n < b_n$, $\quad b_n = \frac{1}{n^3}$, $\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{αρμ. σειρά} \\ p=3. \end{array} \right.$

$\sum_n a_n \le \sum_n b_n = \sum_n \frac{1}{n^3} < +\infty$

συγκλίνει

σε κάποιο $0 < b < +\infty.$

Παρατ.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5+n}}$$ συγκλίνει, διότι.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^5+n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \frac{1}{n^{5/3}} = \frac{1}{n^p}$$

όπου $p = \frac{5}{3} > 1$.

$\Rightarrow \sum_n \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n^5+n}}}_{a_n}$ συγκλίνει, διότι $\sum_n \underbrace{\frac{1}{n^{5/3}}}_{b_n}$ συγκλ.

Θεώρημα (κριτήριο ριζών).

Η σειρά $\sum_{n\geq 1} a_n$

(i) **συγκλίνει**, αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

(ii) **αποκλίνει**, αν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

- Αν βγει $= 1$, δε μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα.

- $\sum_n \frac{e^{2n}}{n^n} = ?$ $\sqrt[n]{\frac{e^{2n}}{n^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{e^2}{n}\right)^n} = \frac{e^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

και τελικά $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{2n}}{n^n} < +\infty$. (συγκλίνει). < 1.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n\theta^n}_{a_n} \quad , \quad \boxed{|\theta| < 1}$$

$$\left[\sqrt[n]{|a_n|}\right]$$

$$\sqrt[n]{n\cdot|\theta|^n} = \underset{\downarrow\,1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{|\theta|^n}}_{|\theta|} = |\theta|\cdot 1 < 1$$

Τελικά $\sum_{n=1}^{+\infty} n\theta^n$ συγκλίνει.

$\boxed{\text{Κριτήριο Λόγου}}$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

(i) <u>συγκλίνει</u>, αν $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

(ii) <u>αποκλίνει</u>, αν $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$

αν 1, τότε δεν ξέρουμε.

Παραδείγματα.

(A) $\sum_{n=1} \frac{2^n}{n!}$? (B) $\sum_n \frac{e^{2n}}{n^n}$?

$\big((n+1)! = n!(n+1)\big)$.

• Θετικοί.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\cancel{2^{n+1}}}{(n+1)!}}{\frac{\cancel{2^n}}{n!}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} < +\infty.$$

• κριτήριο του λόγου για την προηγούμενη τα πήγαμε με κριτ. ρίζας

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{e^{2n+2}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^{2n}}{n^n}} = e^2 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{e^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

(20)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^2}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \qquad \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} < 1$$

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e^2}{n+1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 \quad < 1$$

$$\bullet \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$$

λόγω $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

$1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} \longrightarrow 1$

Θεώρημα (Εναλλάσσουσα σειρά).

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$, με

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0$.

με $\lim_n a_n = 0$, **συγκλίνει**.

Παραδ.

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ $\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$.

Αποδ

Παρατ. η $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow$ και $\frac{1}{n} \to 0 \overset{\text{Θεωρ.}}{\Rightarrow}$ συγκλίνουσα

Εφαρμογή — Δυναμοσειρές

Έστω (a_n) μια ακολ. πραγμ. αριθμών και x μια πραγμ. μεταβλητή. Τότε η

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

λέγεται <u>δυναμοσειρά</u> (κέντρου 0). Γενικότερα, αν $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο το x_0.

Σύγκλιση

Για $x = x_0$, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\underset{\overset{\shortparallel}{x_0}}{x} - x_0)^n = a_0 \cdot (x_0 - x_0)^{\overset{\overset{a_0}{1}}{\nearrow} 0} = a_0$$

Γενικά έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.

(ii) συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(iii) υπάρχει $R > 0$: η δυναμοσειρά να συγκλίνει για κάθε x : $|x - x_0| < R$.

• Ο αριθμός R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

Για $R=0$, συγκλίνει μόνο για $x=x_0$.

Για $R>0$, συγκλίνει για

$x \in (x_0-R, x_0+R)$ και

στα άκρα του διαστήματος εξετάζεται

κατά περίπτωση.

Το διάστημα λέγεται διάστημα σύγκλισης.

Το R υπολογίζεται από τη σχέση

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{ ή } \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} .$$