Μάθημα 1

Τα βασικά αντικείμενα με τα οποία δουλεύουμε στα Μαθηματικά φιλοξενούνται μέσα σε <u>σύνολα</u>.

Τα αντικείμενα μέσα στα σύνολα, τα λέμε <u>στοιχεία</u>. π.χ

$A = \underbrace{\{1, 2, 3\}}_{\text{στοιχεία}}$ → άγκιστρα

κεφαλαία γράμματα

$B = \{x, y, z\}$

$\Gamma = \{\text{χημικές ενώσεις}\}$ → περιγραφικό

Ένα σύνολο θα πρέπει να είναι <u>καλά ορισμένο</u>, με την έννοια να μπορούμε να αποφανθούμε ποιά είναι τα στοιχεία του, και αν κάποιος μας δώσει ένα αντικείμενο, να ξέρουμε ή να προσδιορίζεται με κάποιο τρόπο, αν είναι μέλος αυτού του συνόλου ή όχι.

Πάντα όμως μιλάμε για ένα <u>σύνολο αναφοράς</u>, ένα βασικό σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία που θα μπορούσαν να μας ενδιαφέρουν δυνητικά στο πρόβλημα που μας απασχολεί.

③

π.χ. όταν μελετάμε χημικές ενώσεις το βασικό σύνολο είναι το $X = \{\text{χημικές ενώσεις}\}$

Θα μπορούσατε μετά να σας απασχολεί αν μία χημική ένωση είναι <u>άκυκλο αλκύλιο</u> ή <u>όχι</u>.

Για τα άκυκλα αλκύλια

$$A = \{ C_nH_{2n+1},\ n \geq 1 \} \subset X$$

υποσύνολο του

περιλαμβάνει κάποιες από τις χημικές ενώσεις

Ένα στοιχείο $\omega \underline{\in} A$, αν

το ω είναι μέλος του A και

λέμε ω <u>ανήκει στο</u> A.

Αν δεν είναι μέλος του A, λέμε

ω <u>δεν ανήκει</u> στο A, και

γράφουμε $\omega \notin A$.

π.χ. $CH_3 \in A$, αφού είναι κυκλικό αλκύλιο,

ενώ $CH_2 \notin A$.

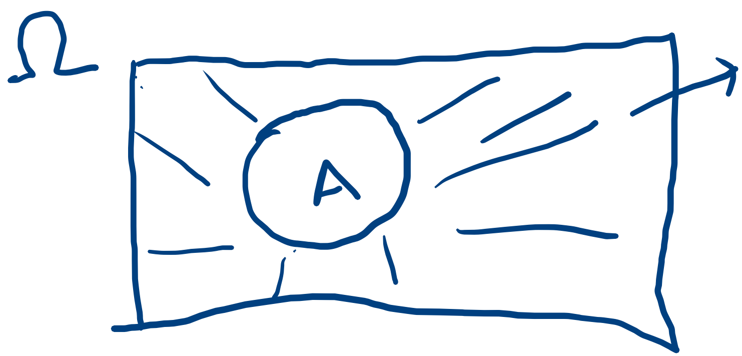
Έστω Ω ένα σύνολο αναφοράς. (5)

Αν $A \subset \Omega$, τότε

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$$

τέτοια ώστε

και το λέμε <u>συμπλήρωμα</u> του A



Το γραμμοσκιασμένο είναι το A^c

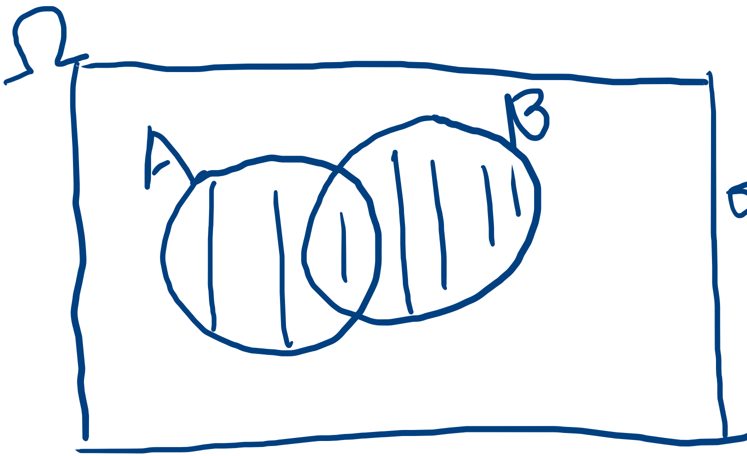
[διάγραμμα του Venn]

⑥

Αν $A, B \subset \Omega$, τότε

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ ή } \omega \in B\}$$

και το λέμε ένωση των A και B
(A ένωση B)



Αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που είναι <u>είτε στο A</u>, <u>είτε στο B</u>

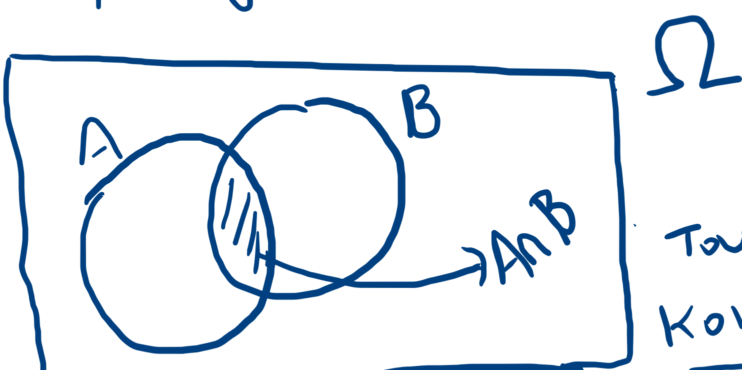
Αν $A, B \subset \Omega$, τότε

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \in B\}$$

και το λέμε **τομή** των A και B

(A τομή B).

Συμβολίζεται επίσης απλά με $AB \to$ σημαίνει $A \cap B$



Αποτελείται από τα στοιχεία του Ω που είναι τα **κοινά στοιχεία** των A και B.

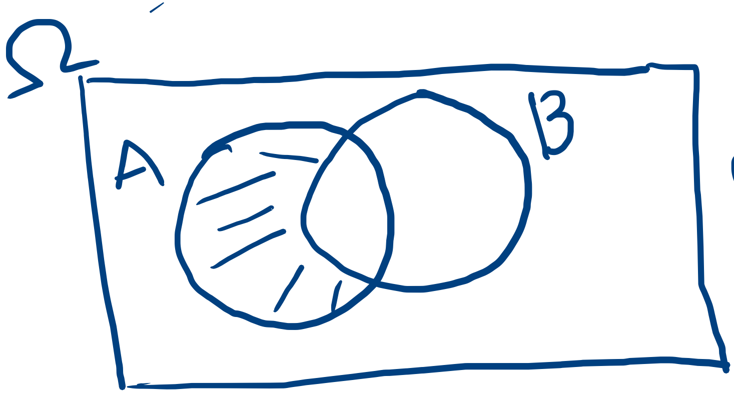
Συνολοθεωρητική διαφορά δύο συνόλων

Αν $A, B \subset \Omega$, τότε ορίζουμε

$$A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ και } \omega \notin B\}$$

και το λέμε διαφορά του B από το A

ή A μείον B και γράφουμε $A - B$



Αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B

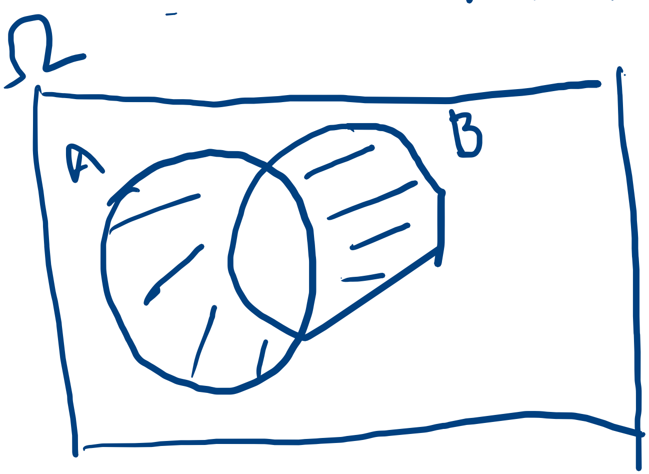
Επίσης $A \setminus B = A \cap B^c$

Συμμετρική Διαφορά

Λέμε συμμετρική διαφορά των A και B το σύνολο

$$A \triangle B = \left\{ \omega \in \Omega : (\omega \in A \text{ και } \omega \notin B) \text{ ή } (\omega \in B \text{ και } \omega \notin A) \right\}$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



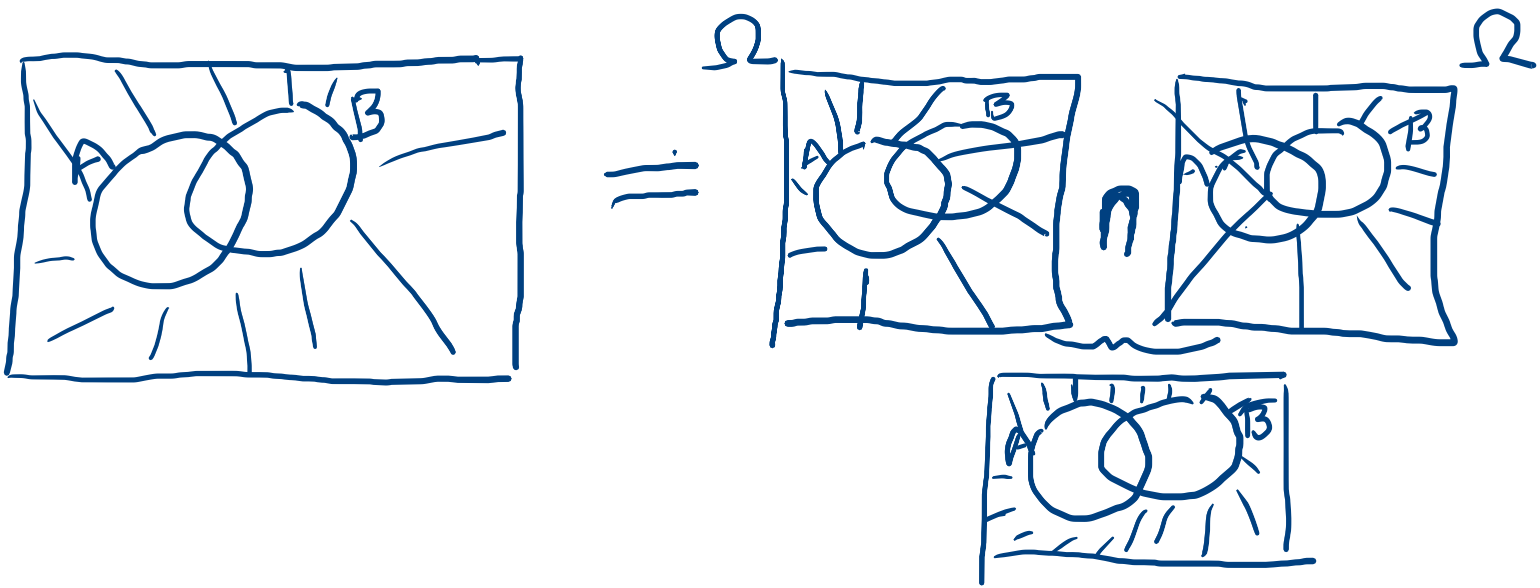
Είναι τα στοιχεία στα οποία <u>διαφέρουν</u> τα A και B.

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus AB$$

Κανόνες του De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$



Προσοχή

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ <u>ή</u> $x \in B$

$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ <u>και</u> $x \in B$

$x \notin A \cup B \Rightarrow$ ~~$x \notin A$ ή $x \notin B$~~ (είναι λάθος)

→ δεν ανήκει ούτε στο A, ούτε στο B

, δηλ. δεν ανήκει στο A <u>και</u> δεν ανήκει στο B

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ <u>και</u> $x \notin B$.

Γενικά αν Ω είναι σύνολο αναφοράς, τότε επιλέγουμε ένα υποσύνολό του, βάσει κάποιας ιδιότητας, ας πούμε I.

δηλ. $$A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ να είναι ικανοποιεί την ιδιότητα } I\}$$

π.χ. $\Omega \to$ χημικές ενώσεις

$A \to$ άκυκλα αλκύλια

$\omega \in A \iff \omega$ είναι άκυκλο αλκύλιο, δηλ. ω χημική ένωση ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα.

$\iff$: αν και μόνο αν

Ειδικά Σύνολα

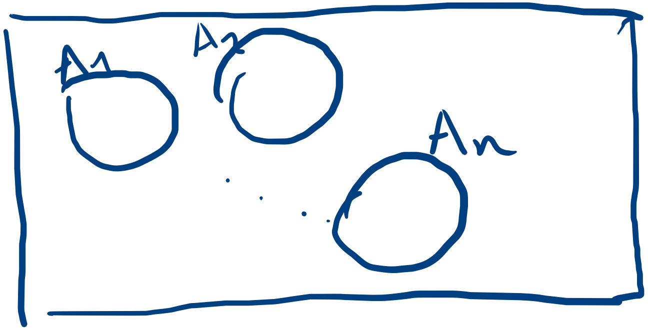
$\{\ \} \equiv \emptyset \subset \Omega$

δεν περιέχει τίποτα

↳ κάθε συνόλου Ω

- Αν A και B είναι : $A \cap B = \emptyset$, τότε τα A και B, λέγονται <u>ξένα μεταξύ τους</u>.
- Αν έχουμε n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$, για $i \neq j$, τότε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ λέγονται <u>ξένα ανά δύο</u>

αναπαράστ.

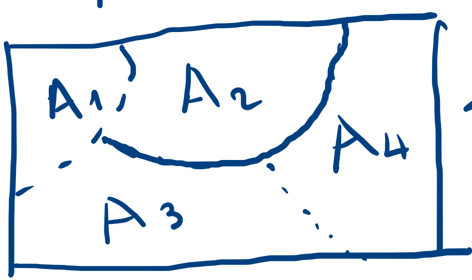


→ οποιοσδήποτε συνδυασμός τους κανένα κοινό σημείο.

Αν <u>επιπλέον</u> καλύπτουν το χώρο, δηλ.

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$, τότε

λέμε ότι αποτελούν μια <u>διαμέριση του Ω</u>



→ αποτελούν μια διαμέριση του Ω (είναι <u>ξένα ανά δύο</u> + <u>καλύπτουν</u> το Ω)

$\Omega = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$

Τότε A, B καλύπτουν το Ω, αλλά δεν είναι ξένα

15

ΣΒΗΣΤΗΚΕ
ΚΑΤΑ ΛΑΘΟΣ
ΘΑ ΣΥΜΠΛΗΡΩΘΕΙ
ΣΥΝΤΟΜΑ

Σύνολα αριθμών

$\mathbb{N} \longrightarrow$ φυσικοί αριθμοί $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

↳ ακέραιοι αριθμοί

$\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \text{ και } n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Το $\mathbb{N}$ χωρίς το 0

π.χ. $\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{2}{5}$, -0.123, $0,121212$

π.χ. $0,3333\ldots$ $(0,\overline{3}) \rightarrow \dfrac{1}{3}$ $\quad 0,\overline{12}$ → ρητός (περιοδικός δεκαδικός)

Οι ρητοί αριθμοί.

όμως $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{άρρητοι}\}$$

↳ (αυτός που δεν είναι ρητός)

Το συμβολίζαμε με $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Οι πραγματικοί αριθμοί θεμελιώνονται με αξιώματα: αξιωματική θεμελίωση του $\mathbb{R}$.

Βασίζεται σε κάποιες ιδιότητες που ικανοποιούν αξιωματικά τα στοιχεία του.

Αυτό κατοχυρώνει κάθε σύνολο που θα ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες ως ένα μοντέλο των πραγμ. αριθμών.

Οι πραγμ. αριθμοί είναι εφοδιασμένοι με κάποιες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, ώστε αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε η πρόσθεση $+$ και ο πολ/σμός $\cdot$ ικανοποιούν

$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ (προσετ. ιδιότητα) $\quad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

$\alpha+\beta = \beta+\alpha$ (αντιμ. ιδιότητα) $\quad \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$

ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου το 0: $\quad$ ύπαρξη ουδ. στοιχ. το 1

$\alpha+0 = 0+\alpha = \alpha \quad \alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$

ύπαρξη αντίθετου στοιχείου $-\alpha$: $\quad$ υπάρξ. αντιστρ. στοιχ. $\alpha \neq 0$

$\alpha+(-\alpha) = (-\alpha)+\alpha = 0 \quad \alpha\cdot\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\cdot\alpha = 1$

$\alpha^{-1} \to \frac{1}{\alpha}$

\+ Επιμεριστική $a\cdot(b+\gamma) = ab + a\gamma$

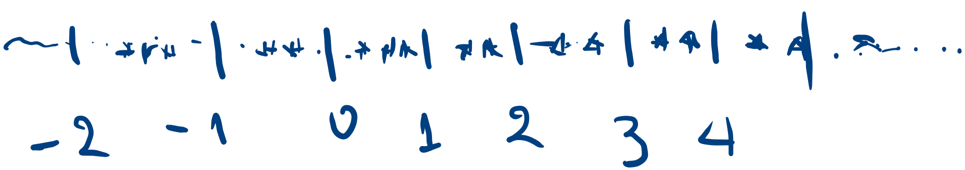
\+ Ιδιότητες <u>διάταξης</u>

αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει μόνο ένα από τα παρακάτω τρία:

$$a < b \quad , \quad \text{ή} \quad b < a \quad \text{ή} \quad a = b$$

\+ (ιδιοτ. συνδ. της διαζ. με $(+)$ και $(\cdot)$)

\+ Ιδιότητα της <u>πληρότητας</u>



// κατοχυρώνει ότι το $\mathbb{R}$ μπορούμε να το σκεφτ. όσο ένα σύνολο σαν ευθεία που δεν έχει καμία τρύπα

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

είναι απειροσύνολα ...

Γνήσιο Υποσύνολο

$A \underset{\neq}{\subset} B \rightarrow$ A είναι υποσύνολο του B & επιπλέον το B έχει κάποιο στοιχείο που δεν ανήκει στο A

$A \underset{\neq}{\subset} B \longrightarrow A \subset B$ & $A \neq B$

Συναρτήσεις

Τι θυμόμαστε ? $y = f(x)$

Το y είναι συνάρτηση του x.

$P \cdot V = n R \cdot T$ → καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων.

P: πίεση

V: όγκος

n: γραμμομόρια της ύλης

R: παγκ. σταθερά των αερίων

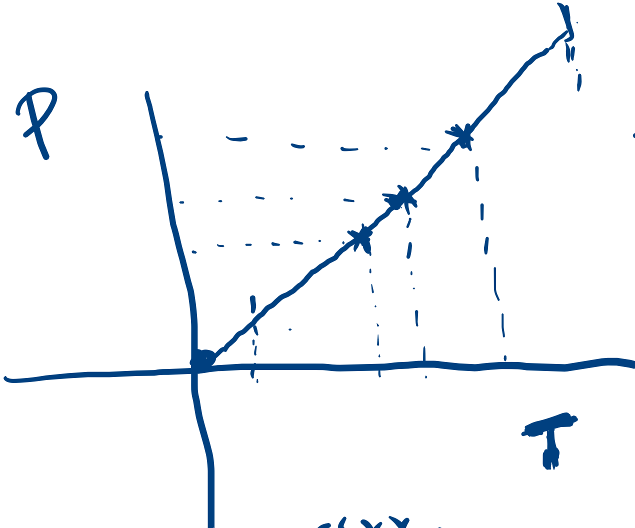
T: απόλ. θερμοκρ.

Θα υποθέσαμε ότι κάποιες είναι ελεγχόμενες μεταβλητές και μπορούμε να τις σταθεροποιήσουμε.

π.χ. για σταθερό όγκο (π.χ. κλειστό δοχείο).

V σταθ. $\Rightarrow$ $P = \frac{nR}{V} \cdot T$ → γραμμική συνάρτηση του P ως προς T.

$\frac{nR}{V} \neq 0$



→ από μετρήσεις έγιναν υποθέσεις για μια "ιδανική" σχέση που συνδέει P και T.

προσεγγ. σχέση που ισχύει για ένα εύρος θερμοκρ.

Έχει σημασία να βρεθεί το "εύρος τιμών" του T που ισχύει με πολύ ικανοπ. ακρίβεια αυτή η σχέση.

Πεδίο ορισμού ? → της συνάρτησης.

$$P \cdot V = nR \cdot T$$

Ας υποθέσουμε ότι το P είναι σταθερό

$\downarrow$

σταθερή πίεση

$$V = \frac{nR}{P} \cdot T$$

V $\downarrow$ εξαρτημένη μεταβλητή.

T $\hookrightarrow$ ανεξάρτητη μεταβλητή

Τι δεν είναι συνάρτηση ?
(μιας μεταβλητής)

Αν δεν είχαμε σταθεροποιήσει την πίεση,
τότε για ένα $T = t \Rightarrow V_1, V_2, \ldots, V_k$: δεν θέλουμε πολλές τιμές

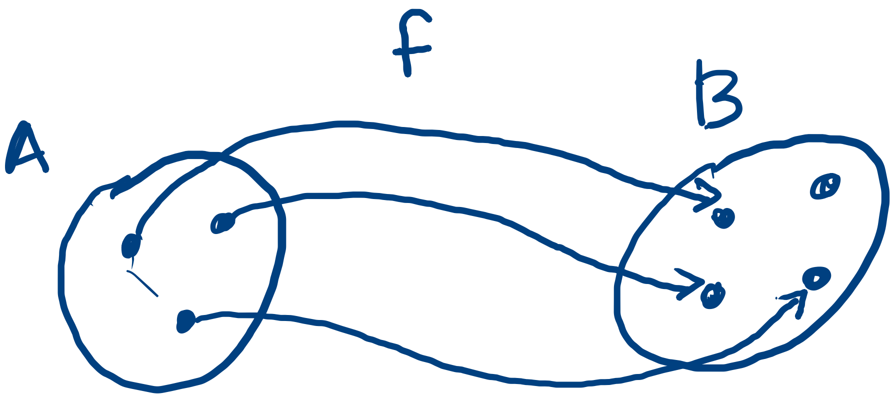
Πολλές μορφές συναρτήσεων

$f(x) = a x^2$, $f(x) = a \cdot e^x$, $f(x) = \log x$

είναι τυπικά παραδ. συναρτ.

$a \cdot e^{(x-b)}$, όπου a, b σταθερές.

Χρειαζόμαστε έναν αυστηρότερο ορισμό συνάρτησης από ένα σύνολο σε κάποιο άλλο σύνολο.



Μια συνάρτηση f είναι ένας κανόνας (ή διαδικασία) αντιστοίχησης, όπου <u>κάθε</u> στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε <u>ένα</u> στοιχείο του συνόλου B. Τότε μιλάμε για μια συνάρτηση f από το A στο B και γράφουμε

$$f : A \longrightarrow B$$

πεδίο ορισμού

πεδίο τιμών

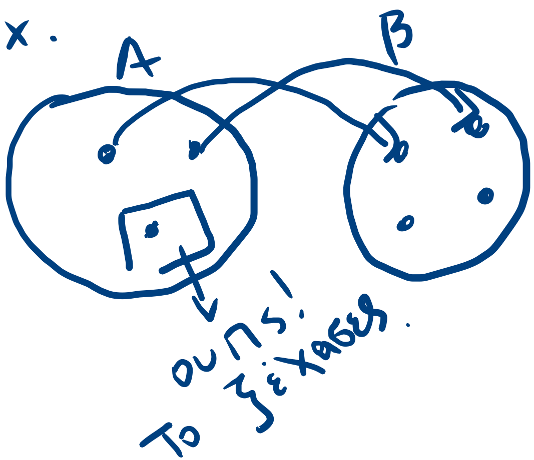
(σύνολο ευρύ που μας καλύπτει)

Προσοχή !

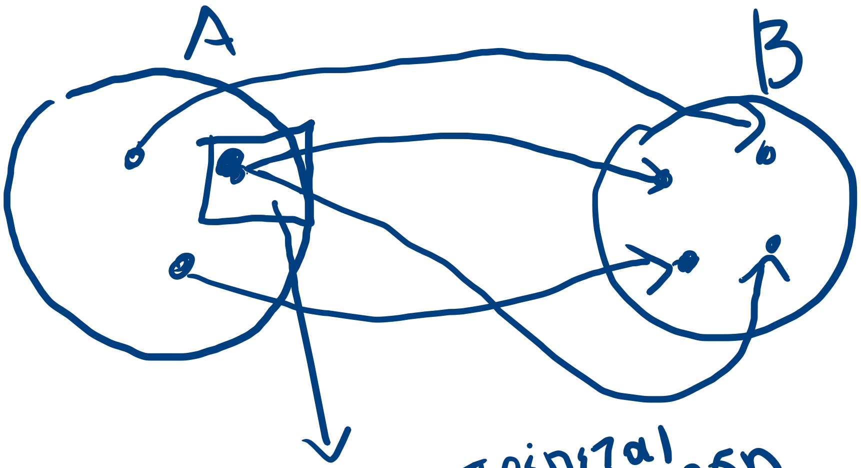
1. δεν πρέπει να ξεχάσουμε κανένα στοιχείο του A όταν φτιάχνουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A.

2. ένα στοιχείο του A πρέπει να πηγαίνει σε <u>ένα μόνο</u> στοιχείο του B.

π.χ.



δεν είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A.



δεν επιτρέπεται
σε μια συνάρτηση
ένα στοιχείο του A
να πηγαίνει σε δύο του B

(προσοχή σε αυτά τα δύο)

Σύνολο Τιμών

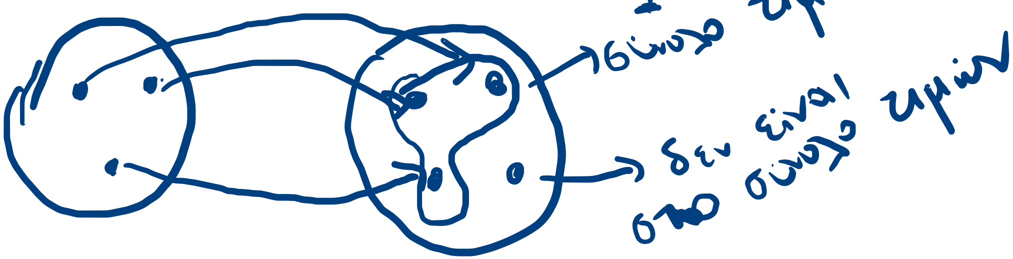
Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση.

Τότε το σύνολο

$$f(X) = \{ y \in Y : y = f(x) \}$$

λέγεται <u>σύνολο τιμών</u> της f.

Προφανώς $f(X) \subset Y$



Επίσης λέμε ότι το y είναι εικόνα του x, μέσω της f, αν

$$y = f(x), \text{ για κάποιο } x \in X,$$

ενώ το x λέγεται και <u>πρότυπο</u> αυτής της εικόνας.

<u>Ορσ</u>: Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται "1-1" (ένα προς ένα), αν

$$\forall x_1, x_2 \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

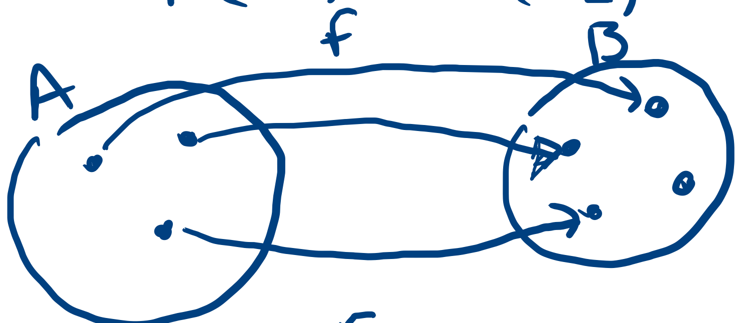
[δύο διαφορετικά x δίναν διαφορετικές εικόνες]

Ισοδύναμη αναδιατύπωση

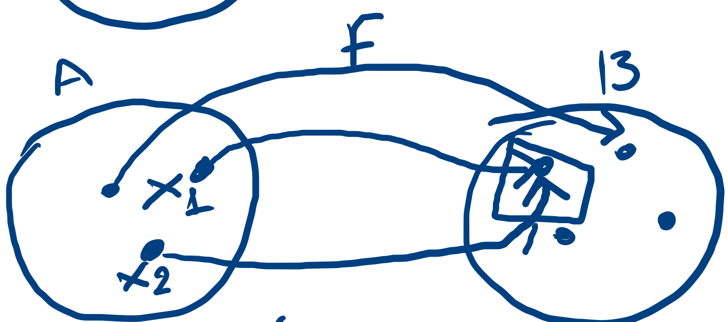
αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$

(ή) $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

π.χ.



→ η $f: A \to B$ είναι "1-1"



Η $f: A \to B$ είναι συνάρτηση αλλά όχι "1-1"

εδώ έχουμε $x_1 \neq x_2$, και όμως $f(x_1) = f(x_2)$.

~~Σχόλιο~~ αν p, q 2 μαθηματικές προτάσεις (31)

και έχουμε

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

Τότε ισοδύναμα έχουμε

$$\boxed{\overline{q} \Rightarrow \overline{p}}$$

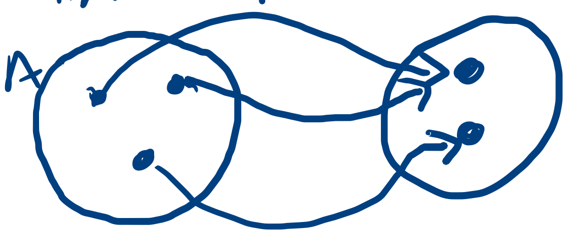
π.χ. $\underset{(p)}{x_1 \neq x_2} \Rightarrow \underset{(q)}{f(x_1) \neq f(x_2)}$ (ορισμός 1-1)

$$\underset{(\overline{q})}{f(x_1) = f(x_2)} \Longrightarrow \underset{(\overline{p})}{x_1 = x_2}$$

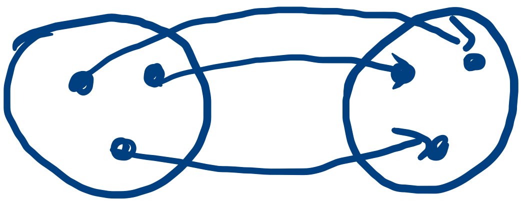
Ορσ : Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται επί (του Y), αν $f(X) = Y$

σύνολο τιμών = πεδίο τιμών

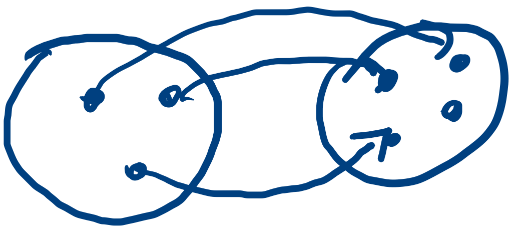
π.χ.



Η $f: A \to B$ είναι **επί** (όχι 1-1)



Η f είναι "1-1" και επί



Η f είναι "1-1", αλλά όχι επί.

Άσκηση

1. Διατυπώστε μαθηματικά τις αρνήσεις των προτάσεων ($f: X \to Y$)

(i) η f είναι "1-1"

(ii) η f είναι επί

(iii) η f είναι "1-1" και επί.

Προσοχή

Το για κάθε στην άρνηση γίνεται υπάρχει και το υπάρχει στην άρνηση γίνεται για κάθε

$\overline{\forall} = \exists$, $\overline{\exists} = \forall$

ή $\nexists$

34

π.χ. έστω $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

και το $2 \cdot \mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

- <u>κάθε</u> στοιχείο του συνόλου $2 \cdot \mathbb{N}$

p: είναι άρτιος αριθμός.

$\overline{p}$: <u>υπάρχει</u> κάποιο στοιχείο του συνόλου $2 \cdot \mathbb{N}$ που δεν είναι άρτιος αριθμός.

$\forall x \in A$, ικανοποιείται η ιδιότητα I

$\big\downarrow$ άρνηση

$\exists x \in A$, που το x δεν ικανοποιεί το I

$\exists\, x \in A$ που ικανοποιεί την ιδιότ. Ι.

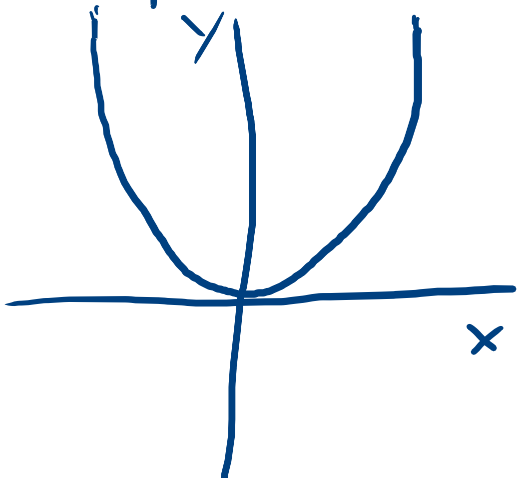
$\downarrow$ άρνηση.

$\forall\, x \in A$ <u>δεν</u> ικανοποιείται η ιδιότητα Ι.

Παραδείγματα

Έστω $y = x^2$.

Η συνάρτηση είναι



$f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πεδίο τιμών

$x^2 \geq 0$

κάποιος θα μπορούσε να είχε πάρει

$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$

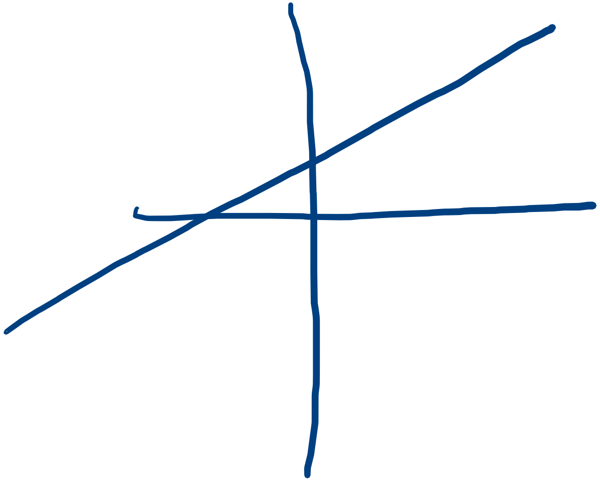
$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$ σύνολο τιμών

εδώ είναι επί.

Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ είναι πάντα επί του συνόλου τιμών της.

$f : X \longrightarrow$ σύνολο τιμών της.

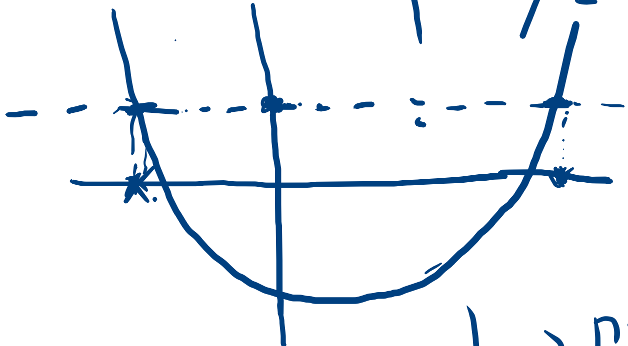
π.χ. $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$



$y = \alpha x + \beta$

$f(x) = \alpha x + \beta$

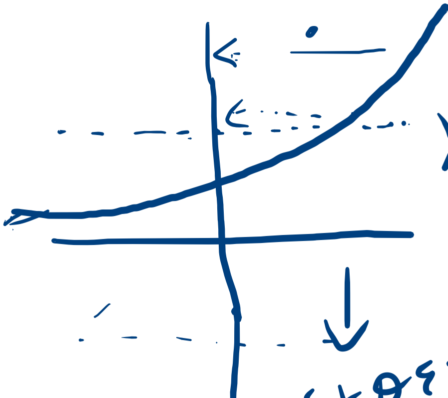
$\Gamma \rightarrow y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$



$\leftrightarrow$ δεν είναι "1-1"

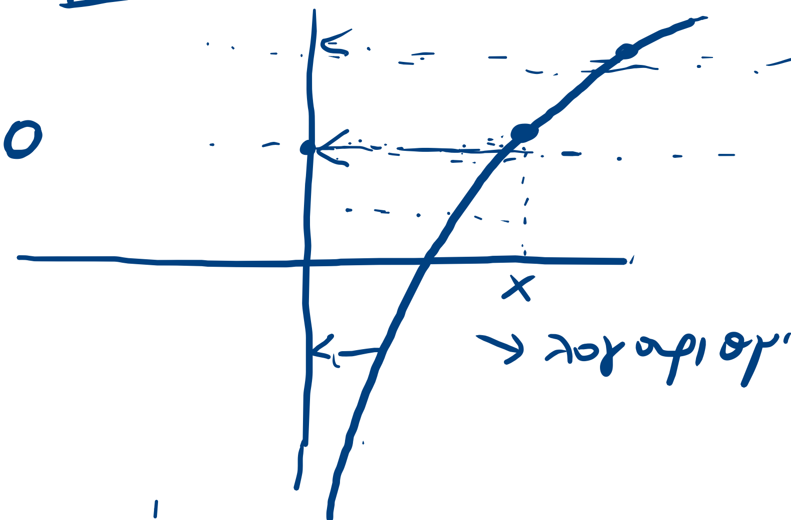
$\rightarrow$ παραβολική

$y = \log x$



$y = e^x > 0$

εκθετική συνάρτηση



$\rightarrow$ λογαριθμική

$f(x) = \log x$

πεδίο ορισμού

$(0, +\infty)$