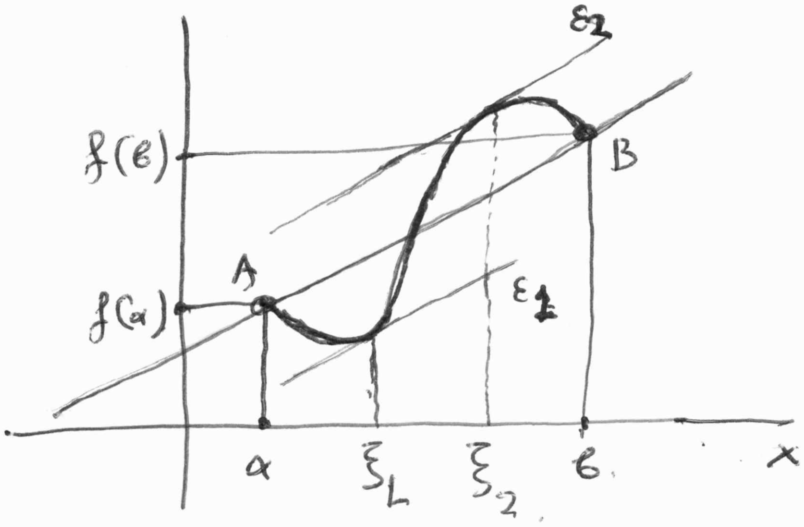
Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και συνέπειες αυτού

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x\in(\alpha,\beta)$.

Τότε υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\boxed{\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\xi)}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Η κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ ισούται με

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Το Θ.Μ.Τ. του Διαφ. Λογισμού μας λέει ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ της γραφικής παράστασης να είναι ίση με $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Στο προηγούμενο σχήμα υπήρχαν δύο τέτοια ξ. Το ξ_1 και το ξ_2.

Επειδή δύο ευθείες της μορφής $y=a_1x+b_1$ και $y=a_2x+b_2$ είναι παράλληλες αν και μόνον αν $a_1=a_2$, το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι υπάρχει εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f παράλληλη προς την ευθεία AB.

Στο προηγούμενο σχήμα υπήρχαν δύο παράλληλες. Η ε_1 που αντιστοιχεί στο σημείο ξ_1 και η ε_2 που αντιστοιχεί στο σημείο ξ_2.

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Αν $f:\Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα Δ (Δ πεπερασμένο ή άπειρο) και

α) $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ (όχι δηλαδή άκρο) τότε $f\uparrow$ (γνησίως αύξουσα) σ' όλο το Δ.

β) $f'(x)<0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ, τότε $f\downarrow$ (γν. φθίνουσα) σ' όλο το Δ.

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε μόνο το α).

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$.

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. του Διαφ. Λογισμού στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Τότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ με $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$

Αλλά $f'(\xi) > 0$. Άρα $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ και

επειδή $x_2 - x_1 > 0$, έπεται ότι $f(x_2)-f(x_1) > 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα $f \uparrow$.

<u>Σημείωση:</u> Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.

Π.χ. $f(x) = x^3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $f'(x) = 3x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

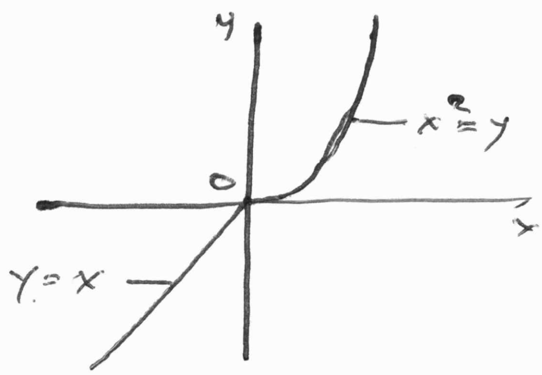
Αλλά $\underline{f'(0) = 0}$.

Παρ' όλα αυτά η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γενικά αν $f : \Delta \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, εκτός από μεμονωμένα σημεία $x_1, x_2, \dots, x_k$, τότε και πάλι $f \uparrow$ σ' όλο το Δ.

<u>Παράδειγμα:</u> 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$



← Γραφική παράσταση

Η f είναι συνεχής γιατί $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$

και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0) = 0^2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x)=1$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)=2x^2$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άν $x_1 < 0 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(0) \Leftrightarrow x_1 < 0$

και $f(0) < f(x_2) \Leftrightarrow 0 < x_2^2$.

Άρα $f(x_1) < f(0) < f(x_2)$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$

Στο $x=0$ δεν ορίζεται παράγωγος, γιατί

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

2) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x \ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Τότε $f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ γιατί

$\cos x \neq 0$ (μάλιστα $\cos x > 0$) $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Άρα $f \uparrow$.

Τοπικά ακρότατα

1) Μια συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ λέμε ότι στο $x_0 \in \Delta$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται θέση τοπ. ελαχίστου και το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο.

Αν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε το x_0 λέγεται θέση <u>ολικού</u> ελαχίστου και το $f(x_0)$ ολικό ελάχιστο της f.

2) Μια συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ λέμε ότι στο $x_0 \in \Delta$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, αν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

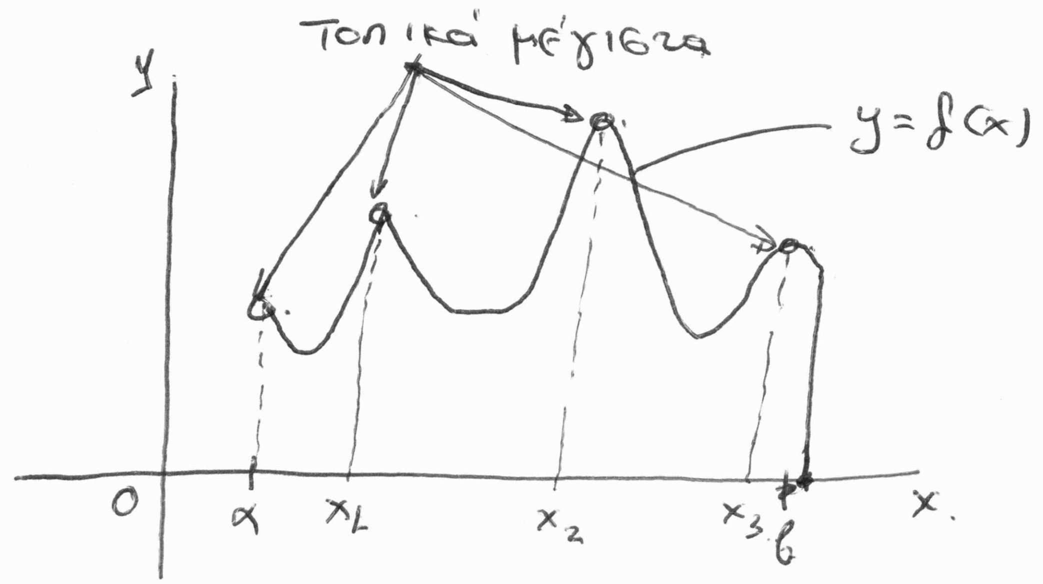
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το $x_0 \in \Delta$ λέγεται θέση τοπ. μεγίστου και το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

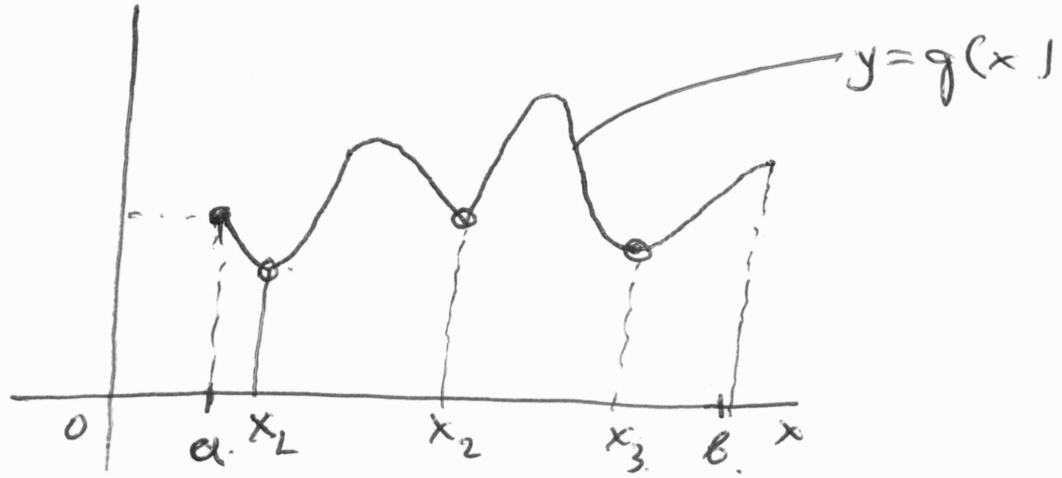
Αν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε το x_0 λέγεται θέση <u>ολικού</u> μεγίστου και το $f(x_0)$ ολικό μέγιστο της f.

Τοπικά ελάχιστα ή τοπικά μέγιστα λέγονται <u>τοπικά ακρότατα</u>.

Ολικά μέγιστα ή ολικά ελάχιστα λέγονται <u>ολικά ακρότατα</u>.



Τα α, x_1, x_2, x_3 είναι θέσεις τοπικών μεγίστων της f.



Τα x_1, x_2, x_3 είναι θέσεις τοπικών ελαχίστων της g.

<u>Θεώρημα (Fermat)</u> Έστω $f : \Delta \to \mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι:

1) Το $x_0 \in \Delta$ είναι θέση τοπικού ακρότατου της f.

2) Υπάρχει η παράγωγος $f'(x_0)$.

Τότε $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη: Έστω ότι το $x_0 \in \Delta$ είναι θέση τοπικού μεγίστου. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$f(x) \le f(x_0)$$

για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \Delta$.

Τότε, αν $x \in (x_0-\delta, x_0]$ θα έχουμε $x < x_0$ και άρα $f(x) \le f(x_0)$. Επομένως

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) \le 0 & \text{και} \\ x - x_0 < 0 \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{(-)\ f(x) - f(x_0)}{(-)\ x - x_0} \ge 0.$$

Επομένως

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \Rightarrow \boxed{f'(x_0) \ge 0}$$

Αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε $x > x_0$ και $f(x) \le f(x_0)$.

Άρα

$$\frac{(-)\ f(x) - f(x_0)}{(+)\ x - x_0} \le 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

δηλαδή $\boxed{f'(x_0) \le 0}$.

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι $f'(x_0) = 0$.

Για τα τοπικά ελάχιστα η απόδειξη είναι παρόμοια.

Προσοχή! Το αντίστροφο δεν αληθεύει.

Μπορεί $f'(x_0) = 0$ και το x_0 να μην είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

<u>Παράδειγμα:</u> $f(x) = x^3, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$.

Αλλά το $x = 0$ δεν είναι θέση τοπικού ακρότατου γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα.

<u>Εφαρμογές:</u> 1) α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

$g(x) = x^3 - 3x + 2$

$h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των πολυωνύμων $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

<u>Λύση:</u> α) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) =$
$= 3(x-1)^2 \geq 0$. Έχουμε το πινακάκι:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τοπικό μέγιστο		τοπικό ελάχιστο		

$h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τοπικό μέγιστο		Τοπικό ελάχιστο.		

β). Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+3x+1) =$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = (-\infty)\cdot 1 = -\infty$.

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) =$

$= (+\infty)\cdot 1 = +\infty$.

Από Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η f έχει ρίζα (Θεώρημα Βολζάνο). Επειδή είναι γνησίως αύξουσα, έχει ακριβώς 1 (μία) ρίζα.

Ομοίως $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) =$

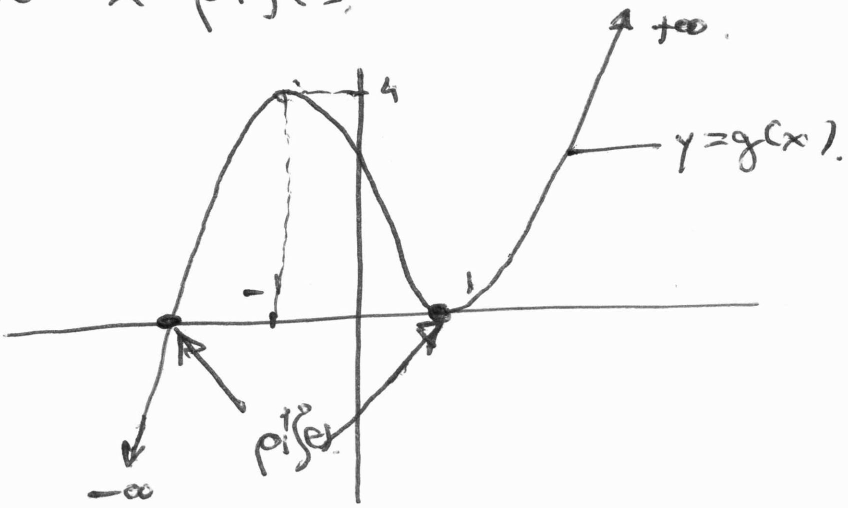
$= (-\infty)\cdot 1 = -\infty$

Στο $x=-1$ έχει τοπικό μέγιστο $g(-1) =$
$= (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1+3+2 = 4 > 0$.
Επειδή η $g \nearrow (-\infty,-1]$ στο $(-\infty,-1]$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
Στο $[-1,1]$ είναι $\searrow$ (γν. φθίνουσα) και $g(1) = 1-3+2=0$. Άρα μοναδική ρίζα στο $[-1,1]$ είναι το 1. Τέλος, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}(x^3)\cdot \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right) = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

και επειδή $g \uparrow [1,+\infty)$ ~~[illegible]~~ και $g(1)=0$ στο διάστημα $(1,+\infty)$ δεν έχει ρίζα.

Σύνολο 2 ρίζες



$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2-1) = \lim_{x\to-\infty}(x^3)\cdot\lim\left(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$= (-\infty)\cdot 2 = -\infty$

$h(0) = -1 < 0$. Άρα στο $(-\infty, 0]$ δεν έχει ρίζα.

$h(1) = 2-3-1 = -2 < 0$ και $h \downarrow [0,1]$ και η

h δεν έχει ρίζα στο $[0,1]$

$h \uparrow [1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x^3-3x^2-1) = +\infty.$

Από θεώρημα Bolzano η h έχει μία ρίζα μόνο στο $(1,+\infty)$.