2) Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών ($L(y)=f(t)$ ή $y''+ay'+by=f(t)$

και $f(t)$ ειδικής μορφής (δηλ. $\begin{cases} \text{• εκθετική} \\ \text{• πολυώνυμο του } t \\ \text{• τριγ. συνάρτηση} \end{cases}$) a, b σταθ.)

Ασκήσεις:

1) Να βρεθεί μία ειδική λύση της

$$y''-4y=e^t \quad (1)$$

Υπενθύμιση: $\boxed{L(y)=f(t)}$

Γεν. λύση: $y(t)=y_{o\mu}(t)+y_{\varepsilon}(t)$, y_1, y_2 λύσεις της $L(y)=0$

y_1, y_2 γρ. ανεξ. $\Leftrightarrow W(y_1,y_2)(t)\neq 0 \quad \forall t\in I$

Αναζητούμε λύση της μορφής $y_\varepsilon(t) = Ae^t$

$$\left.\begin{aligned} y_\varepsilon'(t) &= Ae^t \\ y_\varepsilon''(t) &= Ae^t \end{aligned}\right\}$$

* Αντικαθιστούμε την ειδ. λύση στην αρχική εξίσωση.

① : $Ae^t - 4Ae^t = e^t \quad | \; A = -\frac{1}{3}$

$-3Ae^{\cancel{t}} = e^{\cancel{t}}$

$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2$

Οπότε

$$\boxed{y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{3}e^t}$$

Παρατήρηση: Η γενική λύση της ① είναι ($y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = e^{-2t}$ λύσεις της $L(y) = 0$)

$$y(t) = y_{ομ}(t) + y_\varepsilon(t)$$

$$\boxed{y(t) = (c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}) - \frac{1}{3}e^t}$$

2) Να βρεθεί η ειδική λύση της

$$y'' - 4y = e^{2t} \quad ①$$

* Όταν το 2ο μέλος είναι λύση της ομογενούς

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$\left.\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= Ae^{2t} \\ y_\varepsilon'(t) &= 2Ae^{2t} \\ y_\varepsilon''(t) &= 4Ae^{2t} \end{aligned}\right\} ②$$

* Πρώτα κοιτάω αν το 2ο μέλος είναι λύση της ομογενούς & μετά παίρνω την ειδ. λύση

①② : $4A\cancel{e^{2t}} - 4A\cancel{e^{2t}} = e^{2t}$ (λάθος)

Αναζητούμε τώρα ειδ. λύση

$y_\varepsilon(t) = A \cdot t \cdot e^{2t}$ (γιατί e^{2t} λύση της αντίστοιχης ομογενούς)

106

$$\boxed{y'' - 4y = e^{2t} \quad (1)}$$

*e^{2t} λύση αντίστοιχης ομογενούς ⇒ θέλει t

$$\left.\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= A \cdot t \cdot e^{2t} \\ y_\varepsilon'(t) &= A e^{2t} + 2At e^{2t} \\ y_\varepsilon''(t) &= 2A e^{2t} + 2A e^{2t} + 4A e^{2t} \end{aligned}\right\} (3)$$

$$(1)(3): \quad 4Ae^{2t} + \cancel{4Ate^{2t}} - \cancel{4Ate^{2t}} = e^{2t}$$

$$A = \frac{1}{4}$$

Οπότε $y_\varepsilon(t) = \frac{1}{4} t e^{2t}$

<u>Άσκηση:</u> Να βρεθεί η ειδική λύση της δ.εξ.

$$y'' - 4y = e^{-2t}$$

(<u>Υπόδειξη:</u> $y_\varepsilon(t) = A t e^{-2t}$ (γιατί e^{-2t} λύση της αντίστοιχης ομογενούς))

Άσκηση: Να βρεθεί η ειδ. λύση της

$y'' - 4y = 1$ ①

Οπότε αναζητούμε ειδ. λύση της μορφής:

$$\left.\begin{array}{l} y_\varepsilon(t) = A \\ y_\varepsilon'(t) = 0 \\ y_\varepsilon''(t) = 0 \end{array}\right\} ②$$

① ② $0 - 4A = 1$

$A = -\frac{1}{4}$

$y_\varepsilon(t) = A$

Άρα

$$\boxed{y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{4}}$$

Άσκηση: Να βρεθεί ειδ. λύση της

$y'' - 4y = t$ ①

Για την αντίστοιχη ομογενή:

$r^2 - 4r = 0 \Leftrightarrow r_1 = 2, r_2 = -2$

$y_{o\mu}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$\left.\begin{array}{l} y_\varepsilon(t) = at + b \\ y_\varepsilon'(t) = a \\ y_\varepsilon''(t) = 0 \end{array}\right\} ②$$

① ② $0 - 4at - 4b = t$

$\begin{cases} -4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases}$

Οπότε

$y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{4}t$

$$y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{4}(t)$$

<u>Παρατήρηση:</u>

$$y(t) = y_{ομ}(t) + y_\varepsilon(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}t$$

<u>Άσκηση:</u> Να βρεθεί μια ειδ. λύση της δ.ε.

$$y'' - 2y' + y = e^t \quad (1) \rightsquigarrow y'' - 2y' + y = 0$$

$r^2 - 2r + 1 = 0$ | διπλή ρίζα το 1

$y_{ομ}(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$

Αναζ. λύση της μορφής

$$y_\varepsilon(t) = A \cdot t \cdot e^t$$

Η μέθοδος δεν λειτουργεί.

Αναζ. λύση της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= At^2 e^t \\ y_\varepsilon'(t) &= \underline{2Ate^t} + At^2e^t \\ y_\varepsilon''(t) &= 2Ae^t + 2Ate^t + 2Ate^t + At^2e^t \end{aligned}\right\} (2)$$

$(1)(2)$: $2Ae^t + 4A\cancel{te^t} + At^2e^t - 4A\cancel{te^t} - 2At^2e^t + At^2e^t = e^t$

*Αν δεν έγραφου κάτι έγινε λάθο

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{y_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t}$$

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

$$L(y) = e^t$$

Παρατήρηση: $y(t) = y_{o\mu}(t) + y_\varepsilon(t)$

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + \frac{1}{2}t^2 e^t$$

Άσκηση: Να βρεθεί ειδ. λύση της

$$y'' - 4y = \sin t \quad ①$$

* $y'' - 4y = 0$

$r^2 - 4 = 0$ ⟨ $r = 2$, $r = -2$ $\qquad y_1(t) = e^{2t}$, $\quad y_2(t) = e^{-2t}$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &= A\cdot\cos t + B\sin t \\ y_\varepsilon'(t) &= -A\sin t + B\cos t \\ y_\varepsilon''(t) &= -A\cos t - B\sin t \end{aligned}\right\} ②$$

①② : $-A\cos t - B\sin t - 4A\cos t - 4B\sin t = \sin t$

$(A - 4A)\cos t + (-B - 4B)\sin t = \sin t$

$A - 4A = 0 \Rightarrow A = 0$

$-B - 4B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$

* Για να βρούμε τα A, B : αυτό με τους συντελεστές ισχύει εδώ λόγω της ορθογωνιότητας ημιτόνων, συνημιτόνων.

Οπότε

$$\boxed{y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{5}\sin t}$$

* Πάντα πρέπει να συσχετίζουμε και την ομογενή.

Άσκηση: Να βρεθεί μια ασ. λύση της:

$$y'' + 4y = \sin 2t$$

Ομοιόγ.: $y_{o\mu}(t) = e^{0 \cdot t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$

$r^2 + 4 = 0$

$r_{1,2} = \pm 2i$ $\quad y_{o\mu}(t) = e^{\gamma t}(c_1 \cos \delta t + c_2 \sin \delta t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$

Αναζητούμε λύση της μορφής:

$y_\varepsilon(t) = t \cdot (A \cos 2t + B \sin 2t)$

$y'_\varepsilon(t) = A \cos 2t + B \sin 2t + t \cdot (-2A \sin 2t + 2B \cos 2t)$

$= (2Bt + A) \cos 2t + (B - 2At) \sin 2t$

$y''_\varepsilon(t) = 2B \cos 2t - (2Bt + A) 2 \sin 2t - 2A \sin 2t + (B - 2At) 2 \cos 2t$

$= (2B + 2B - 4At) \cos 2t - (4Bt + 2A + 2A) \sin 2t$

$= (4B - 4At) \cos 2t - (4A + 4Bt) \sin 2t$

Αντικαθιστούμε στην αρχική:

$(4B - 4At) \cos 2t - (4A + 4Bt) \sin 2t + 4At \cos 2t + 4Bt \sin 2t$

$\Leftrightarrow (4B - \cancel{4At} + \cancel{4At}) \cos 2t + (\cancel{4Bt} - 4A - \cancel{4Bt}) \sin 2t = \sin 2t$

$\Leftrightarrow 4B \cos 2t - 4A \sin 2t = \sin 2t$

$\Rightarrow \begin{cases} 4B = 0 \\ -4A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} B = 0 \\ A = -\frac{1}{4} \end{matrix}$

Άρα

$y_\varepsilon(t) = -\frac{t}{4} \cos 2t$

Αρχή της υπέρθεσης

$\mathcal{L}(y) = f_1(t) + f_2(t)$ ①, $f_1, f_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς

Θεωρούμε τις διαφορικές

$L(y) = f_1(t)$ ② $\rightsquigarrow \varphi_1(t)$

$L(y) = f_2(t)$ ③ $\rightsquigarrow \varphi_2(t)$

Η $\varphi_1(t)$ λύση της ②.

Η $\varphi_2(t)$ λύση της ③.

Τότε η $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ λύση της ①.

Πράγματι:

$\mathcal{L}(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)) = \mathcal{L}(\varphi_1(t)) + \mathcal{L}(\varphi_2(t)) = f_1(t) + f_2(t)$

Άσκηση: Να βρεθεί μια ειδική λύση της

$$y'' - 4y = e^t + e^{2t} \quad ①$$

$r^2 - 4r = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = -2$

$y_{o\mu}(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$

(Σκεφτόμαστε πώς θα διαχωρίσουμε την ① σε 2 διαφορικές)*

$$y'' - 4y = e^t \quad ②$$

$$y'' - 4y = e^{2t} \quad ③$$

*Η e^{2t} λύση της αντίστοιχης ομογενούς $y''-4y=0$

Για την ②:

Ψάχνουμε ειδ. λύση μορφής:

$y_\varepsilon = A \cdot e^t$

$y_\varepsilon' = A\, e^t$

$y_\varepsilon'' = A\, e^t$

$② \Rightarrow A \cdot e^t - 4Ae^t = e^t \Leftrightarrow -3A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{3}$

Για την ③:

Ψάχνουμε ειδ. λύση μορφής:

$y_\varepsilon = Ate^{2t}$

$y_\varepsilon' = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$

$y_\varepsilon'' = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$

$③ \Rightarrow 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t} - 4Ate^{2t} = e^{2t} \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$

Η $y_{1\varepsilon}(t) = -\frac{1}{3} e^t$ λύση της ②.

Η $y_{2\varepsilon}(t) = \frac{1}{4} t e^{2t}$ λύση της ③.

Μια ειδική λύση της ① λόγω υπόθεσης θα είναι

$$y_\varepsilon(t) = y_{1\varepsilon}(t) + y_{2\varepsilon}(t)$$

Δηλ.

$$y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{4}te^{2t}$$

Άσκηση: Να βρεθεί μια ειδική λύση της

$$y'' - 4y = t^2 + e^t \quad ①$$

ΣΤΟ 2ο ΜΕΛΟΣ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΥΠΑΡΧΕΙ:
* ο εκθετικό
- ο τριγωνομετρική
- ο πολυώνυμο
- ο σταθερά
- ο 2 συναρτ. μαζί

Αν $y_{1\varepsilon}(t)$ ειδ. λύση της $y''-4y=t^2$ ②

Αν $y_{2\varepsilon}(t)$ ειδ. λύση της $y''-4y=e^t$ ③

Τότε (λόγω της αρχής της υπέρθεσης)

$$y_\varepsilon(t) = y_{1\varepsilon}(t) + y_{2\varepsilon}(t)$$

μια ειδική λύση της ①

ο Για τη ②:

Ψάχνουμε ειδ. λύση μορφής

$y_\varepsilon = At^2 + Bt + \Gamma$

$y_\varepsilon' = 2At + B$

$y_\varepsilon'' = 2A$

$$② \Rightarrow 2A - 4\cdot At^2 + 4Bt + 4\Gamma = t^2 \Leftrightarrow (2A+4\Gamma) + 4Bt + (-4A-1)t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + \cancel{4}^{2}\Gamma = 0 \\ 4B = 0 \\ -4A-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -\frac{1}{4} \\ \Gamma = \frac{1}{2}A = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$y_{1\varepsilon}(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}$$

ο Για την ③:

Ψάχνουμε ειδ. λύση μορφής

$y_\varepsilon = Ae^t$

$y_\varepsilon' = Ae^t$

$y_\varepsilon'' = Ae^t$

$$③ \Rightarrow Ae^t - 4Ae^t = e^t \Leftrightarrow -3A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{3}$$

$$y_{2\varepsilon}(t) = -\frac{1}{3}e^t$$

$$y_\varepsilon(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{8}$$

Επίλυση με τη βοήθεια των δυναμοσειρών

$(L(y)=0)$

Ομαλά σημεία

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0$$

Ορισμός: Ένα σημείο $t_0 \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ομαλό σημείο της (1) αν p, q, είναι αναλυτικές στο t_0. Ένα σημείο στο οποίο μια τουλάχιστον από τις συναρτήσεις p και q δεν είναι αναλυτικές, λέγεται ιδιάζον σημείο.

Δ.εξ. Legendre

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}\,y' + \frac{a(a+1)}{1-t^2}\,y = 0 \quad , a \in \mathbb{R} \ , \ t \neq \pm 1$$

Δ.εξ. Bessel

$$y'' - \frac{1}{t}\,y' + \left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) y = 0 \quad , t=0 \text{ ιδιάζον σημείο}$$

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot t^{2n+1} \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot t^{2n} \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = 0 \quad , p, q : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχείς}$$

Θεώρημα: Έστω p και q αναλυτικές συναρτήσεις στο $t_0 \in \mathbb{R}$ με αντίστοιχες σειρές $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (t-t_0)^n$, $q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (t-t_0)^n$ συγκλίνουσες για $|t-t_0|<R$.

Τότε η μοναδική λύση της $L(y)=0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(t_0)=a_0$, $y'(t_0)=a_1$ είναι αναλυτική στο t_0 με σειρά Taylor που συγκλίνει τουλάχιστον για $|t-t_0|<R$.

Άσκηση: Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η δ.εξ.:

$$y'' - y = 0$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot t^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$n-2=k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2) a_{n+2} - a_n] t^n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$n = 0, 2, 4, \ldots$

$$a_2 = \frac{a_0}{1 \cdot 2}$$

$$a_4 = \frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$a_6 = \frac{a_4}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$\vdots$

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}$$

$$a_{2k} = \frac{a_0}{(2k)!}$$

$n = 1, 3, 5, \ldots$

$$n=1: a_3 = \frac{a_1}{2\cdot 3}$$

$$n=3: a_5 = \frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$n=5: a_7 = \frac{a_5}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$\vdots$

$$a_{2k+1} = \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

$$y(t) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y(t) = a_0 \cdot \cosh t + a_1 \cdot \sinh t$$

<u>Άσκηση:</u> $y' - y = 0$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$n-1 = k$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] t^n = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$$

<u>Άσκηση:</u> Με τη μέθοδο των δυναμοσειρών, να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'' + ty' + y = 0 \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ y'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1} \\ y''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1) a_n \cdot t^{n-2} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$(1)(2)\; \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + \underbrace{t\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$n-2=k \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n\right] t^n = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}}$$

$n = 0, 2, 4, \ldots$

$$\underset{2\cdot 1}{a_2} = -\frac{a_0}{2}$$

$$\underset{2\cdot 2}{a_4} = -\frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$$

$$\underset{2\cdot 3}{a_6} = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$\vdots$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{\underset{2\cdot1\cdot 2\cdot2\cdot 2\cdot3\cdot\ldots\cdot 2k}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k}} = \frac{(-1)^k a_0}{2^k \cdot k!}$$

$n = 1, 3, 5, \ldots$

$$\underset{(2\cdot1+1)}{a_3} = \frac{a_1}{3}$$

$$\underset{(2\cdot2+1)}{a_5} = -\frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5}$$

$$\underset{(2\cdot3+1)}{a_7} = -\frac{a_5}{7} = -\frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7}$$

$\vdots$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1 \quad 2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot 2k}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2k+1) \quad 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k} = \frac{(-1)^k 2^k k!\cdot a_1}{(2k+1)!}$$

*τεχνική για να βρω κάτι από αλλού

Οπότε, η λύση θα είναι:

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{(-1)^{n} \cdot t^{2n}}{2^{n} \cdot n!}} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} \cdot 2^{n} \cdot n! \cdot t^{n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sum_{n=}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^{n}}{n!} = e^{-t^2/2}$$