Συστήματα Hamilton

Ορισμός:

Έστω $H \in C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$

$x, y \in C^2(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Χαμιλτονιανό Σύστημα

H. Χαμιλτ. συνάρτησης.

Βασική ιδιότητα

Η συνάρτηση $H(x(t), y(t))$ είναι σταθερή.

Πράγματι, $\dfrac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \dfrac{\partial H}{\partial x} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial H}{\partial y} \dfrac{dy}{dt}$

$$= \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \left(- \frac{\partial H}{\partial x}\right)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow H(x(t), y(t)) = c$, c: σταθερό

- Με απαλοιφή του (χρόνου) t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}} = - \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$ (3) $\rightarrow$

όπου : $M = \frac{\partial H}{\partial x}$, $N = \frac{\partial H}{\partial y}$.

Η (3) είναι ακριβής γιατί $\exists$:

$F \equiv H$:

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η δ.ε. $u'' + g(u) = 0$ γράφεται σε Χαμιλτονιανό Σύστημα.

<u>Λύση</u>: Θέτουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = u' \end{array}\right\}$$

Τότε παραγωγίζοντας την 1^{η} κ' 2^{η} αντίστοιχα έχω :

$$\begin{array}{l} x' = y \\ y' = -g(u) \Rightarrow y' = -g(x) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y} = y \\ \\ \frac{\partial H}{\partial x} = g(x) \end{array}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα και ολοκληρώνουμε την πρώτης ως προς y

$\longrightarrow \quad H = \frac{1}{2} y^2 + h(x)$

$\bullet \ \frac{\partial H}{\partial x} = h'(x) = g(x)$

$h(x) = \int g(x) + c$

$H = \frac{1}{2} y^2 + \int g(x) + c$

Εφαρμογή: $u'' + u^2 = 0.$

Υπενθύμιση: Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{u} \neq \vec{0}$ είναι ένα <u>ιδιοδιάνυσμα</u> του πίνακα A αν και μόνο αν $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{A\vec{u} = \lambda\vec{u}}.$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται <u>ιδιοτιμή</u> του A.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Λύση:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

Τότε

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \lambda_1 = -1 \\ \hline \lambda_2 = 5 \end{array}}.$$

Είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ έχουμε:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ 4x + 4y = 0 \end{array} \Rightarrow x = -y$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ για κάποιο y δηλαδή είναι όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ με οποιοδήποτε $y \neq 0$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ έχουμε:

$(A-\lambda_2 I)\vec{u} = \vec{0}$ $\iff$ $\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} -4x+2y=0 \\ 4x-2y=0 \end{matrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 5$ είναι της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, δηλαδή είναι τα πολλαπλάσια του $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό $y \neq 0$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t) \quad (1) \quad , t \in [\alpha, b] = I$

$p, q, r \in C([\alpha, \beta])$

Λύση της (1): Συνοριακές συνθήκες

$b_1(x) = a_{11}\, x(a) + a_{12}\, x(a) + \beta_{11}\, x(\beta) + \beta_{12}\, x(\beta) = \gamma_1$

$b_2(x) = a_{21}\, x(a) + a_{22}\, x(a) + \beta_{21}\, x(\beta) + \beta_{22}\, x(\beta) = \gamma_2$

Μη ομογενές ΠΣΤ	ομογενές ΠΣΤ
$r(t) \neq 0$	$r(t) = 0$
$\lvert\gamma_1\rvert + \lvert\gamma_2\rvert > 0$	$\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$

I) $$\left(\begin{array}{l} x''t + \pi^2 x = 1, \; t \in [0,1] \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{array}\right)$$

Γενική λύση

$x(t) = \frac{1}{\pi^2} + c_1 \cos \pi t + c_2 \sin \pi t \quad , t \in [0,1]$

Συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \\ -c_1 - \pi c_2 = -\frac{1}{\pi^2} \end{array}\right| \text{αδύνατο}$$

Το ΠΣΤ δεν έχει λύση

I) $\begin{pmatrix} x'' + x = t, & t \in [0,\pi] \\ x(0) - x(\pi) = 0 \\ x'(0) - x'(\pi) = 0 \end{pmatrix}$ ποσ

Γενική λύση

$x(t) = t + c_1 \cos t + c_2 \sin t \quad , t \in [0,\pi]$

$\begin{matrix} 2c_1 - \pi = 0 \\ 2c_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow (c_1, c_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ μοναδική λύση

$x(t) = t + \frac{\pi}{2} \cos t \quad , t \in [0,\pi]$ μοναδική λύση του ποτ.

III) $\begin{pmatrix} x'' + x = 0 \quad , t \in [0,\pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{pmatrix}$ ποτ

$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$\begin{matrix} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1(-1) + c_2 \cdot 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow (c_1, c_2) = (0, c)$

άπειρες λύσεις

$x(t) = c \sin t \quad , t \in [0,\pi]$

Γραμμικά π.σ.τ. με παράμετρο

$\begin{pmatrix} x'' + \lambda x = 0^{(1)} \quad , t \in [0,\pi] \\ x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R} \text{ πραγμ. παράμετρος} \end{pmatrix}$

I) $\lambda = 0 \quad (1) \quad x'' = 0 \quad , x(t) = c_1 + c_2$

$\begin{matrix} x(0) = 0 \\ x(\pi) = 0 \end{matrix} \quad \ldots \Rightarrow x(t) = 0$ (τετριμμένη λύση)

II) $\lambda < 0 \; : \; x(t) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} t} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} t} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow x(t) = 0.$

III) $\lambda > 0 \; : \; x(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$

$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$x(\pi) = 0 \Rightarrow \underbrace{c_2}_{c_2 \neq 0} \sin\sqrt{\lambda} \cdot \pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot \pi = n\pi \Rightarrow \lambda_n = n^2 \quad , n = 1, 2$

$x_n(t) = c \cdot \sin(nt).$

$$\left.\begin{pmatrix} x'' + P(t,\lambda)x' + Q(t,\lambda)x = 0 \quad , t\in[\alpha,\beta] \\ b_1[x]=0 \quad , b_2[x]=0 \end{pmatrix}\right._{\Pi_0} \quad (\text{ομογενές ποσ})$$

Ορισμός:

Οι τιμές του λ για τις οποίες το ποσ (Π_0) έχει λύσεις εκτός της μηδενικής ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις ιδιοσυναρτήσεις (ή ιδιολύσεις) του (Π_0).

Πρόβλημα Sturm-Liouville

$\alpha_0(t)x'' + \alpha_1(t)x' + \alpha_2(t)x = 0 \quad (1) \quad , \forall t\in I$

$\alpha_1(t) \neq 0 \quad , \alpha_0(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t) \in C(I)$

Πολ/με την (1) με $\dfrac{1}{\alpha_0(t)} e^{\int \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)}dt} \quad (2)$

$$(1),(2): \underbrace{e^{\int \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)}dt}}_{p(t)} \cdot x'' + \underbrace{\frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)} e^{\int \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)}dt}}_{p'(t)} \cdot x' + \underbrace{\frac{\alpha_2(t)}{\alpha_0(t)} e^{\int \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_0(t)}}}_{q(t)} \cdot x = 0$$

$$\Rightarrow (p(t)\cdot x')' + q(t)\cdot x = 0$$

$$(p(t)\cdot x')' + (q(t) + \lambda r(t))x = 0 \quad , p,q,r \in C(I)$$

$$p(t) \geq 0 , r(t) > 0$$

Εξίσωση Sturm-Liouville

Ορισμός:

Μια ακολουθία συναρτήσεων (φ_n), $n=1,2,\ldots$ με $\varphi_n : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους $r : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ανν:

$$\int_\alpha^\beta \varphi_n(t)\varphi_\lambda(t) r(t)\,dt = \begin{cases} 0 & , \kappa \neq \lambda \\ \alpha_\kappa & , \kappa = \lambda \end{cases}$$

Σχόλιο:

Αν $a_\kappa = 1$, $\forall \kappa \in \mathbb{N}$ τότε το σύστημα λέγεται ορθοκανονικό.

Το $\int_\alpha^\beta \varphi_\kappa(t)\varphi_\lambda(t)\, r(t)\, dt = \delta_{\kappa\lambda}$ (το δέλτα του Kroneiker)

$$\delta_{\kappa\lambda} = \begin{cases} 1, & \kappa = \lambda \\ 0, & \kappa \neq \lambda \end{cases}$$

Λήμμα: (ταυτότητα Lagrange)

Αν $L = \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right) + q(t)$, $p, p', q \in C(I)$ $[a,b]$ (διαφορικός τελεστής)

και αν $x_1, x_2 \in C''(I)$ τότε ισχύει:

$$x_1 \cdot L[x_2] - x_2 \cdot L[x_1] = \left[p(t)(x_1 \cdot x_2' - x_1' x_2)\right]'$$

ή

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\left(x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt}\right)\right]$$

Απόδειξη:

$$x_1 \cdot L[x_2] - x_2 \cdot L[x_1] = x_1\left[(p(t)\, x_2')' + q(t)x_2\right] - x_2\left[(p(t)x_1')' + q(t)x_1\right] = \ldots =$$

$$= p'(t)\underbrace{(x_1 x_2' - x_1' x_2)}_{W} + p(t)\underbrace{(x_1 x_2'' - x_1'' x_2)}_{W'} = \ldots = \left[p(t)(x_1 x_2' - x_1' x_2)\right]'$$

Θεώρημα:

Θεωρούμε το π.σ.τ.

$$\begin{pmatrix} L[x] = (p(t)\cdot x')' + q(t)\cdot x - \lambda \cdot r(t) x \\ p, p', q, r \in C([\alpha,\beta]) \\ b_1[x] = 0, \; b_2[x] = 0 \end{pmatrix}$$

Αν x_1, x_2 ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2, τότε ισχύει το εξής:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\left(\int_\alpha^\beta x_1(t)\, x_2(t)\, r(t)\, dt = p(\beta)\, W(\beta) - p(a)\, W(a),\right.$$

όπου $W(a) = W(x_1, x_2)\,(\alpha)$

$W(\beta) = W(x_1, x_2)\,(\beta)$ ορίζουσες Wronski στα a, β.

Παρατήρηση:

Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες $p(a)W(a) = p(\beta)W(\beta)$

τότε $\int_\alpha^\beta x_1(t)\, x_2(t)\, r(t)\, dt = 0$ $\quad x_1, x_2$ ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις

Υπόδειξη για την απόδ. του προηγ. Θεωρήματος:

x_1, x_2 λύσεις της δ.εξ.

$L[x_1] = -\lambda_1 r \cdot x_1$

$L[x_2] = -\lambda_2 r x_2$

Από ταυτότητα Lagrange:

$x_1 L[x_2] - x_2 L[x_1] = [\,p(t)\,(x_1 x_2' - x_1' x_2)\,]'$

$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot r \cdot x_1 x_2 = [\,p(t)\,(x_1 x_2' - x_1' x_2)\,]'$

Ολοκληρώνοντας:

$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_\alpha^\beta x_1(t) x_2(t) r(t)\, dt = [\,p(t)\,(x_1 x_2' - x_1' x_2)\,]_\alpha^\beta = \ldots =$

$= p(\beta) W(\beta) - p(\alpha) W(\alpha).$

Θεώρημα:

Αν x_i, x_j είναι δυο ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ (περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville).

$$\left(\begin{array}{ll} (p(t) \cdot x')' + q(t) \cdot x = -\lambda r x & \\ x(\alpha) = x(\beta) & p, p', q, r \in C([\alpha, \beta]) \\ x'(\alpha) = x'(\beta) & p, r > 0 \end{array}\right)$$

που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i, λ_j $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ αντίστοιχα, τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους r.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΤΕΡΑ, ΕΧΟΥΜΕ:

VIII. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (π.σ.τ.) συνίσταται στην αναζήτηση της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, που ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή συνθήκες πάνω στο σύνορο του πεδίου ορισμού της λύσης. Προβλήματα συνοριακών τιμών αναφέρονται σε όλα τα είδη και τις τάξεις των διαφορικών εξισώσεων. Από πλευράς εφαρμογών τα σημαντικότερα π.σ.τ. είναι εκείνα στα οποία η διαφορική εξίσωση είναι συνήθης β′ τάξης και ειδικότερα γραμμική. Η επίλυση πολλών κλασικών προβλημάτων της φυσικής, που τα μαθηματικά τους μοντέλα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως π.χ. η διάδοση της θερμότητας, η παλλόμενη χορδή, η στήριξη δοκού κ.α., οδηγεί σε π.σ.τ. τέτοιου τύπου.

Έτσι, λοιπόν, στα επόμενα θα γίνει μελέτη π.σ.τ. για γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$L[x]=x''+p(t)x'+q(t)x=r(t),\quad t\in I=[\alpha,\beta] \qquad (1.1)$$

με $p,q,r\in C(I)$.

Αναζητούμε λύση της (1) που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\left.\begin{aligned} b_1[x]&=\alpha_{11}x(\alpha)+\alpha_{12}x'(\alpha)+\beta_{11}x(\beta)+\beta_{12}x'(\beta)=\gamma_1\\ b_2[x]&=\alpha_{21}x(\alpha)+\alpha_{22}x'(\alpha)+\beta_{21}x(\beta)+\beta_{22}x'(\beta)=\gamma_2\end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Υποθέτουμε ότι η μία συνοριακή συνθήκη δεν προκύπτει από την άλλη με πολλαπλασιασμό επί κατάλληλο αριθμό.

Ορισμός 1.1

Εάν η δ.ε. (1.1) είναι ομογενής ($r(t)=0$, $\forall t\in I$) και οι συνοριακές συνθήκες (2.1) επίσης ομογενείς ($\gamma_1=\gamma_2=0$), τότε το πρόβλημα $\big((1.1),(1.2)\big)$ λέγεται <u>γραμμικό</u> <u>ομογενές</u> π.σ.τ.. Εάν η (1.1) είναι μη ομογενής ή μία τουλάχιστον συνοριακή συνθήκη είναι μη ομογενής ($|\gamma_1|+|\gamma_2|>0$), τότε το πρόβλημα $\big((1.1),(1.2)\big)$ είναι ένα <u>μη</u> <u>ομογενές</u> π.σ.τ..

Ένα π.σ.τ. μπορεί να μην έχει λύση ή να έχει μία λύση μόνο ή ακόμη και άπειρες λύσεις, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.1

$$\begin{cases} x''+\pi^2x=1, \ t\in[0,1] \\ x(0)+x'(0)=0 \\ x(1)+x'(1)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=\frac{1}{\pi^2}+c_1\text{συν}\pi t+c_2\text{ημ}\pi t, \ t\in[0,1]$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{cases} c_1+\pi c_2=-\dfrac{1}{\pi^2} \\ -c_1-\pi c_2=-\dfrac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

που είναι αδύνατο. Δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 1.2

$$\begin{cases} x''+x=t, \ t\in[0,\pi] \\ x(0)-x(\pi)=0 \\ x'(0)-x'(\pi)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=t+c_1\text{συν}t+c_2\text{ημ}t, \ t\in[0,\pi]$$

Οι σταθερές c_1,c_2 λόγω των συνοριακών συνθηκών ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} 2c_1-\pi=0 \\ 2c_2=0 \end{cases}$$

που έχει τη μοναδική λύση $(c_1,c_2)=\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$.

Άρα το π.σ.τ. έχει μία, μοναδική, λύση την

$$x(t)=t+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu t,\ t\in[0,\pi]$$

Παράδειγμα 1.3

$$\begin{cases} x''+x=0,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\sigma\upsilon\nu t+c_2\eta\mu t,\ t\in[0,\pi]$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1\cdot 1+c_2 0=0 \\ c_1\cdot(-1)+c_2\cdot 0=0 \end{cases}$$

που έχει τις λύσεις $(c_1,c_2)=(0,c)$, $c\in\mathbb{R}$.

Επομένως το π.σ.τ. έχει άπειρες λύσεις

$$x(t)=c\eta\mu t,\ t\in[0,\pi].$$

2. ΓΡΑΜΜΙΚΑ Π.Σ.Τ. ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ.

Παράδειγμα 2.1.

Θεωρούμε το π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0,\ t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

όπου λ είναι πραγματική παράμετρος.

Για την επίλυσή του διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) Εάν $\lambda=0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1t+c_2$$

και η απαίτηση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες δίνει:

$$x(t)=0,\ t\in[0,\pi]\ (\text{τετριμένη λύση}).$$

(ii) Εάν $\lambda<0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\exp\left(\sqrt{-\lambda}t\right)+c_2\exp\left(\sqrt{-\lambda}t\right)$$

και οι συνοριακές συνθήκες δίνουν $(c_1,c_2)=(0,0)$, δηλαδή

$$x(t)=0,\ t\in[0,\pi]$$

(iii) Εάν $\lambda>0$ τότε η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=c_1\sigma\upsilon\nu\sqrt{\lambda}t+c_2\eta\mu\sqrt{\lambda}t,\ t\in[0,\pi]$$

Από τη συνοριακή συνθήκη $x(0)=0$ συνάγεται ότι $c_1=0$ και λόγω της $x(\pi)=0$ έχουμε

$$c_2\eta\mu\sqrt{\lambda}\pi=0$$

Για να έχει το π.σ.τ. μη τετριμένες λύσεις, δηλαδή "γνήσιες λύσεις", όπως λέμε, πρέπει:

$$\sqrt{\lambda}\pi=n\pi,\ n=1,2,...$$

δηλαδή για τις τιμές

$$\lambda_n=n^2,\ n=1,2,...$$

της παραμέτρου λ, το π.σ.τ. έχει τη λύση

$$x_n(t)=c\eta\mu(nt),\ t\in[0,\pi],\ n=1,2,...$$

Έτσι γενικότερα, εάν θεωρήσουμε το π.σ.τ.

$$\begin{cases} x''+P(t,\lambda)x'+Q(t,\lambda)x=R(t),\ t\in[\alpha,\beta] \\ b_1[x]=\gamma_1,\ b_2[x]=\gamma_2 \end{cases} \qquad (\pi)$$

όπου λ πραγματική (ή και μιγαδική) παράμετρος, τότε η ύπαρξη ή μη λύσης του εξαρτάται από τις τιμές του λ.

ΟΜΟΓΕΝΕΣ Π.Σ.Τ.

$$\begin{cases} x''+P(t,\lambda)x'+Q(t,\lambda)x=0,\ t\in[\alpha,\beta],\ \lambda\in\mathbb{R} \\ b_1[x]=0,\ b_2[x]=0 \end{cases} \qquad (\Pi_0)$$

Ορισμός 2.1

Οι τιμές του λ για τις οποίες το π.σ.τ. (π_0) έχει λύση, εκτός της μηδενικής ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις, ιδιοσυναρτήσεις ή ιδιολύσεις του ~~(π)~~ Πο. Το σύνολο των ιδιοτιμών ονομάζεται φάσμα του π.σ.τ. (π_0).

Στην περίπτωση του ομογενούς π.σ.τ., ιδιοσυναρτήσεις είναι οι μη μηδενικές (μη τετριμένες) λύσεις του.

Στο παράδειγμα (2.1) οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n=n^2$, $n=1,2,\dots$ και οι ιδιοσυναρτήσεις $x_n(t)=\text{cημ}(nt)$, $t\in[0,\pi]$, $n=1,2,\dots$.

Επίλυση του ομογενούς π.σ.τ.

$$\begin{cases} x''+P(t,\lambda)x'+Q(t,\lambda)x=0, \ t\in[\alpha,\beta], \ \lambda\in\mathbb{R} \\ b_1[x]=0 \ , \ b_2[x]=0 \end{cases} \qquad (\pi_0)$$

Αν $u_\lambda(t)$, $v_\lambda(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. του (π_0), τότε η γενική λύση της είναι

$$x_\lambda(t)=c_1u_\lambda(t)+c_2v_\lambda(t), \ t\in[\alpha,\beta].$$

Συνεπώς το π.σ.τ. (π_0) θα έχει μη τετριμένες λύσεις τότε και μόνο τότε αν το σύστημα (ως προς c_1,c_2)

$$\begin{cases} b_1[u_\lambda]c_1+b_1[v_\lambda]c_2=0 \\ b_2[u_\lambda]c_1+b_2[v_\lambda]c_2=0 \end{cases}$$

έχει λύση διάφορη της μηδενικής, δηλαδή τότε και μόνο τότε αν το λ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\begin{vmatrix} b_1[u_\lambda] & b_1[v_\lambda] \\ b_2[u_\lambda] & b_2[v_\lambda] \end{vmatrix}=0 \qquad (2.1)$$

Το σύνολο των ριζών της (2.1) είναι το φάσμα του π.σ.τ. (π_0).

3. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM-LIOUVILLE.

Θεωρούμε τη δ.ε.

$$a_0(t)x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0 \qquad (E)$$

με $a_0(t)\neq 0$ $\forall t\in I$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη επί

$$\frac{1}{a_0(t)}\exp\left\{\int\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\}$$

και θέτουμε

$$p(t)=\exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\},\quad q(t)=\frac{a_2(t)}{a_0(t)}\exp\left\{\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right\}$$

Τότε η (E) γίνεται

$$p(t)x''+p'(t)x'+q(t)x=0$$

ή

$$(p(t)x')'+q(t)x=0 \tag{3.1}$$

Η δ.ε. (3.1) είναι η <u>αυτοσυζυγής</u> μορφή της (E) και όπως είναι φανερό η (E) με $a_0,a_1,a_2\in C(I)$ ανάγεται πάντοτε στη μορφή αυτή.

Θεωρούμε τη δ.ε. αυτοσυζυγούς μορφής με παράμετρο λ

$$(p(t)x'(t))'+(q(t)+\lambda r(t))x(t)=0,\quad t\in I=[a,\beta] \tag{3.2}$$

Ορισμός 3.1

Η δ.ε. (3.2), όπου $p\in C^1(I)$, $q,r\in C(I)$, με $p(t)\geq 0$ και $r(t)>0$ $\forall t\in I$ ονομάζεται εξίσωση <u>Sturm-Liouville</u>. Εάν $p(t)>0$ $\forall t\in I$ τότε η (3.2) ονομάζεται <u>ομαλή</u> (κανονική) <u>εξίσωση</u> <u>Sturm-Liouville</u> και εάν $p(\alpha)=0$ ή $p(\beta)=0$ τότε η (3.2) ονομάζεται <u>ιδιάζουσα</u> (μη κανονική) <u>εξίσωση</u> <u>Sturm-Liouville</u>.

Είναι φανερό ότι η εξίσωση Sturm-Liouville έχει λύσεις αφού γράφεται

$$p(t)x''+p'(t)x'+(q(t)+\lambda r(t))x=0$$

και οι p, p′, q−λr είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Ορισμός 3.2

Μια ακολουθία συναρτήσεων (φ_n) n=1,2,... με $\varphi_n:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέμε ότι αποτελεί ένα <u>ορθογώνιο</u> <u>σύστημα</u> στο διάστημα [α,β] με συνάρτηση βάρους $r:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τότε και μόνον τότε αν:

$$\int_\alpha^\beta \varphi_k(t)\varphi_\lambda(t)r(t)dt=\begin{cases}0, & k\neq\lambda\\ a_k, & k=\lambda\end{cases}$$

Αν $a_k=1$ $\forall k\in\mathbb{N}$ τότε το σύστημα ονομάζεται <u>ορθοκανονικό</u> και γράφουμε

$$\int_\alpha^\beta \varphi_k(t)\varphi_\lambda(t)r(t)dt=\delta_{k\lambda}$$

όπου $\delta_{k\lambda}$ είναι το δέλτα του Kronecker, δηλαδή

$$\delta_{k\lambda}=\begin{cases}1, & k=\lambda\\ 0, & k\neq\lambda\end{cases}$$

Σημείωση 3.1

Για $\varphi_k=\varphi_\lambda=\varphi$ η συνάρτηση με τύπο

$$\|\varphi(t)\|=\left(\int_\alpha^\beta[\varphi(t)]^2r(t)dt\right)^{1/2}$$

ορίζει μία norm στο χώρο $C([\alpha,\beta])$.

Είναι προφανές ότι εάν η ακολουθία (φ_n) $n=1,2,\ldots$ αποτελεί ένα ορθογώνιο σύστημα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε η ακολουθία (f_n) με $f_n(t)=\dfrac{\varphi_n(t)}{\|\varphi_n(t)\|}$, $n=1,2,\ldots$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $[\alpha,\beta]$ ως προς την ίδια συνάρτηση βάρους.

Λήμμα 3.1 (Ταυτότητα Lagrange)

Εάν

$$L=\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right)+q(t)$$

με $p,p',q\in C([\alpha,\beta])$ είναι ένας αυτοσυζυγής διαφορικός τελεστής στο $[\alpha,\beta]$ και εάν x_1,x_2 είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, τότε:

$$x_1L[x_2]-L[x_1]x_2=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]'$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό του ορισμού L έχουμε:

$$\begin{aligned}x_1L[x_2]-L[x_1]x_2&=x_1\left[(px_2')'+qx_2\right]-x_2\left[(px_1')+qx_1\right]=x_1(px_2')'-x_2(px_1')'\\&=x_1(p'x_2'+px_2'')-x_2(p'x_1'+px_1'')\\&=p'(x_1x_2'-x_1'x_2)+p(x_1x_2''-x_1''x_2)\\&=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]'.\end{aligned}$$

Θεωρούμε την εξίσωση Sturm-Liouville:

$$L[x]=(px')'+qx=-\lambda rx \tag{3.3}$$

$$\left(p\in C^1([\alpha,\beta]),\ q,r\in C([\alpha,\beta])\right)$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$b_1[x]=0,\ b_2[x]=0 \tag{3.4}$$

όπου b_1,b_2 είναι οι "συνοριακοί τελεστές", όπως έχουν οριστεί στην (1.2).

Θεώρημα 3.1

Αν x_1,x_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. ((3.3),(3.4)) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1,λ_2, τότε

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta x_1(t)x_2(t)r(t)dt=p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha)$$

όπου $W(\alpha)$, $W(\beta)$ είναι οι τιμές της ορίζουσας Wronski για τις x_1,x_2 στα α,β.

Απόδειξη.

Αφού x_1,x_2 είναι λύσεις της δ.ε. (3.3) θα έχουμε

$$L[x_1]=-\lambda_1 rx_1,\ L[x_2]=-\lambda_2 rx_2$$

Αντικαθιστούμε στην ταυτότητα Lagrange και παίρνουμε

$$(\lambda_1-\lambda_2)rx_1x_2=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]'.$$

Ολοκληρώνουμε στο $[\alpha,\beta]$

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_\alpha^\beta r(t)x_1(t)x_2(t)dt=\left[p(x_1x_2'-x_1'x_2)\right]_\alpha^\beta=$$

$$=p(\beta)\left[x_1(\beta)x_2'(\beta)-x_1'(\beta)x_2(\beta)\right]-p(\alpha)\left[x_1(\alpha)x_2'(\alpha)-x_1'(\alpha)x_2(\alpha)\right]=$$

$$=p(\beta)W(\beta)-p(\alpha)W(\alpha).$$

Παρατηρούμε ότι εάν οι ιδιοτιμές λ_1,λ_2 είναι διαφορετικές και οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε $p(\alpha)W(\alpha)=p(\beta)W(\beta)$, τότε οι ιδιοσυναρτήσεις x_1,x_2 είναι ορθογώνιες.

Ορισμός 3.3

Ένα π.σ.τ. που αποτελείται από μία δ.ε. Sturm–Liouville και συνοριακές συνθήκες τέτοιες ώστε οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές να είναι ορθογώνιες, λέγεται <u>πρόβλημα</u> (ή σύστημα) <u>Sturm-Liouville</u>.

Αναφέρουμε τρεις, τις πιο σημαντικές, περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στα προβλήματα Sturm–Liouville.

Περίπτωση 1.

$$\begin{cases}\alpha_1x(\alpha)+\alpha_2x'(\alpha)=0, & |\alpha_1|+|\alpha_2|>0\\ \beta_1x(\beta)+\beta_2x'(\beta)=0, & |\beta_1|+|\beta_2|>0\end{cases} \tag{3.5}$$

που ονομάζονται χωρισμένες συνορικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες.

Περίπτωση 2

$$\begin{cases} x\ (\alpha)=x\ (\beta) \\ x'(\alpha)=x'(\beta) \end{cases} \tag{3.6}$$

που ονομάζονται περιοδικές συνθήκες και το αντίστοιχο π.σ.τ. με την επιπλέον υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$, ονομάζεται περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville.

Περίπτωση 3

Εάν $p(\alpha)=p(\beta)=0$, δηλαδή η δ.ε. είναι ιδιάζουσα, τότε είναι προφανές (από το θεώρημα 3.1) ότι οι x_1,x_2 είναι ορθογώνιες. Το αντίστοιχο π.σ.τ. ονομάζεται ιδιάζον πρόβλημα Sturm-Liouville.

Για τις περιπτώσεις 1 και 2 αποδεικνύουμε τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2

Θεωρούμε το π.σ.τ. (τύπου Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες)

$$\begin{cases} L[x]=(px')'+qx=-\lambda rx,\ p,p'q,r\in C([\alpha,\beta]), \quad p,r>0 \\ \alpha_1x(\alpha)+\alpha_2x'(\alpha)=0,\ |\alpha_1|+|\alpha_2|>0 \\ \beta_1x(\beta)+\beta_2x'(\beta)=0,\ |\beta_1|+|\beta_2|>0 \end{cases}$$

Εάν x_i,x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i,λ_j, τότε οι x_i,x_j είναι ορθογώνιες στο $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους r.

Απόδειξη

Αφού x_i,x_j είναι ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο άκρο α, δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_1x_i(\alpha)+\alpha_2x_i'(\alpha)=0 \\ \alpha_1x_j(\alpha)+\alpha_2x_j'(\alpha)=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Το ομογενές γραμμικό σύστημα (3.7) έχει λύση $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$, γιατί, $|\alpha_1|+|\alpha_2|>0$. Επομένως είναι

$$\begin{vmatrix} x_i(\alpha) & x_i'(\alpha) \\ x_j(\alpha) & x_j'(\alpha) \end{vmatrix}=0$$

δηλαδή

$$W(\alpha)=0. \tag{3.8}$$

Με τον ίδιο τρόπο για το άκρο β βρίσκουμε:

$$W(\beta)=0. \tag{3.9}$$

Από τις (3.8), (3.9) και το θεώρημα (3.1) έπεται:

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_\alpha^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, είναι

$$\int_\alpha^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $r(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

Θεώρημα 3.3

Εάν x_i, x_j είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις του π.σ.τ. (περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} (px')'+q(x)=-\lambda rx, \; p,p',q,r\in C([\alpha,\beta]), & p,r>0 \\ x(\alpha)=x(\beta) & \text{με } p(\alpha)=p(\beta) \\ x'(\alpha)=x'(\beta) \end{cases}$$

που αντιστοιχούν στις διαφορετικές ιδιοτιμές λ_i, λ_j τότε οι x_i, x_j είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την r.

Απόδειξη

Οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{cases} x_i(\alpha)=x_i(\beta) \\ x_i'(\alpha)=x_i'(\beta) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_j(\alpha)=x_j(\beta) \\ x_j'(\alpha)=x_j'(\beta) \end{cases}$$

Επομένως για την ορίζουσα Wronski $W(x_i,x_j)(t)$ ισχύει

$$W(\alpha)=W(\beta) \tag{3.10}$$

Από την (3.10), την υπόθεση $p(\alpha)=p(\beta)$ και το θεώρημα (3.1) έπεται

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_\alpha^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

και επειδή $\lambda_i \neq \lambda_j$, θα είναι

$$\int_\alpha^\beta r(t)x_i(t)x_j(t)dt=0$$

δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις x_i, x_j είναι ορθογώνιες στο $[\alpha,\beta]$ με συνάρτηση βάρους r.

Παράδειγμα 3.1.

Να επιλυθεί το ακόλουθο π.σ.τ.:

$$\begin{cases} x''+4x'+(4+9\lambda)x=0 \\ x(0)=0,\ x(\alpha)=0 \quad ,\alpha>0 \end{cases}$$

Το π.σ.τ. γράφεται

$$\begin{cases} (e^{4t}x')'+4e^{4t}x=-\lambda(9e^{4t})x \\ x(0)=0,\ x(\alpha)=0 \end{cases}$$

που είναι ένα πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες (περίπτωση 1) και σύμφωνα με το θεώρημα (3.2) έχει ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις με συνάρτηση βάρους $r(t)=9e^{4t}$. Για την εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $\underline{\lambda<0}$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι:

$$x(t)=c_1\exp\left[(-2+3\sqrt{-\lambda})t\right]+c_2\exp\left[(-2-3\sqrt{-\lambda})t\right]$$

και η απαίτηση να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες δίνει $(c_1,c_2)=(0,0)$ δηλαδή το π.σ.τ. δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

(ii) $\underline{\lambda=0}$: Η γενική λύση είναι:

$$x(t)=(c_1+c_2t)e^{-2t}$$

και από τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε $(c_1,c_2)=(0,0)$ δηλαδή και η $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

(iii) $\underline{\lambda>0}$: Η γενική λύση της δ.ε. είναι

$$x(t)=e^{-2t}\left(c_1\text{συν}3\sqrt{\lambda}t+c_2\text{ημ}3\sqrt{\lambda}t\right)$$

Η συνοριακή συνθήκη $x(0)=0$ δίνει $c_1=0$, και η $x(\alpha)=0$ δίνει $c_2\text{ημ}3\sqrt{\lambda}\alpha=0$. Το πρόβλημα έχει λύσεις (γνήσιες) τότε και μόνο τότε αν

$$\text{ημ}3\sqrt{\lambda}\alpha=0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{9\alpha^2},\quad n=1,2,\ldots$$

και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$x_n(t)=ce^{-2t}\text{ημ}\frac{n\pi t}{\alpha},\quad n=1,2,\ldots$$

Θεώρημα 3.4.

Κάθε πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες συνοριακές συνθήκες έχει μόνο απλές ιδιοτιμές (με πολλαπλότητα 1).

Απόδειξη

Έστω φ_1, φ_2 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λ. Οι φ_1, φ_2 ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες για t=α, δηλαδή:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(\alpha)+\alpha_2\varphi_1'(\alpha)=0 \\ \alpha_1\varphi_2(\alpha)+\alpha_2\varphi_2'(\alpha)=0 \end{cases}$$

και επειδή $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$ θα είναι

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_1'(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_2'(\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

δηλαδή:

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(\alpha)=0.$$

Άρα οι φ_1, φ_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες. Επομένως η ιδιοτιμή λ είναι απλή.

Παράδειγμα 3.2.

Θεωρούμε το σύστημα Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0 & , \ 0\leq t\leq 1 \\ x(0)=0 \\ x(1)+hx'(1)=0, & h>0: \ \text{σταθ.} \end{cases}$$

Εδώ είναι p=1, q=0, r=1.

Για $\lambda\leq 0$ το πρόβλημα δεν έχει ιδιοσυναρτήσεις.

Για $\lambda>0$ η λύση της εξίσωσης Sturm-Liouville είναι:

$$\varphi(t)=c_1\,\text{συν}\sqrt{\lambda}t+c_2\,\text{ημ}\sqrt{\lambda}t$$

$$x(0)=0\Rightarrow c_1=0, \text{ οπότε } \varphi(t)=c_2\,\text{ημ}\sqrt{\lambda}t$$

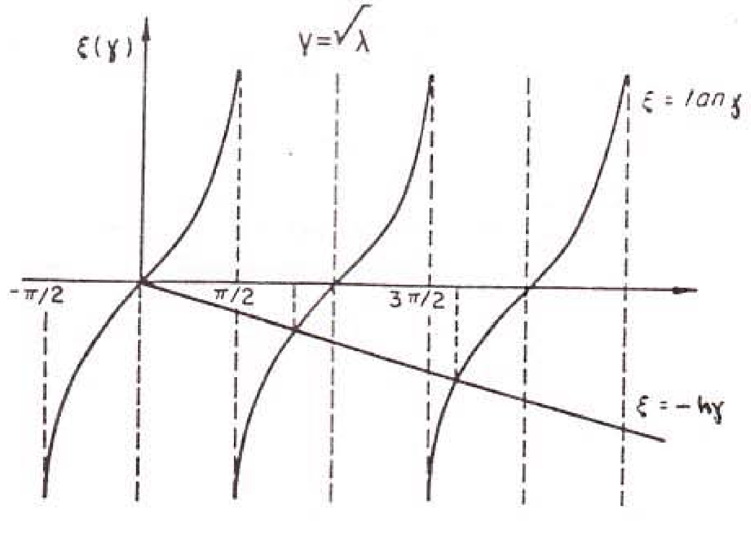
$$x(1)+hx'(1)=0\Rightarrow \text{ημ}\sqrt{\lambda}+h\sqrt{\lambda}\,\text{συν}\sqrt{\lambda}=0 \text{ για } c_2\neq 0$$

που γράφεται

$$\text{εφ}\gamma=-h\gamma$$

όπου

$$\gamma=\sqrt{\lambda}$$



Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης δεν εκφράζονται με ένα απλό τρόπο, μπορούμε όμως να σχεδιάσουμε τις συναρτήσεις

$$\xi=\varepsilon\varphi\gamma$$

$$\text{και } \xi=-h\gamma$$

Οι ρίζες βρίσκονται από τις τομές των δύο καμπυλών, (όπως φαίνεται στο σχήμα) και μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν απείρου πλήθους ρίζες γ_n, $n=1,2,\ldots$

Σε κάθε γ_n αντιστοιχεί μία ιδιοτιμή

$$\lambda_n=\gamma_n^2,\ n=1,2,\ldots$$

Έτσι υπάρχει μία ακολουθία ιδιοτιμών:

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots$$

με:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι οι $\varphi_n(t)=\eta\mu\sqrt{\lambda_n}\,t$.

Παρατήρηση 3.1

Τα περιοδικά προβλήματα Sturm-Liouville μπορεί να έχουν και διπλές ιδιοτιμές, όπως φαίνεται στο επόμενο

Παράδειγμα 3.3.

Το περιοδικό πρόβλημα:

$$\begin{cases} x''+\lambda x=0 \\ x(-\alpha)=x(\alpha) \\ x'(-\alpha)=x'(\alpha) \end{cases}$$

έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2,\ n=1,2,\ldots$$

και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

$$y_n(t)=A_n\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi t}{\alpha},\qquad \varphi_n(t)=B_n\eta\mu\frac{n\pi t}{\alpha},\ n=1,2,\ldots$$

όπου κάθε y_n είναι γραμμικά ανεξάρτητη με κάθε φ_n στο διάστημα $[-\alpha,\alpha]$. Δηλαδή κάθε ιδιοτιμή λ_n είναι διπλή.

Θεώρημα 3.5.

Όλες οι ιδιοτιμές ενός προβλήματος Sturm-Liouville είναι πραγματικές.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda=k+i\mu$, $k,\mu\in\mathbb{R}$ και $\mu\neq 0$ και έστω $\varphi(t)=u(t)+iv(t)$ η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. Τότε ισχύει:

$$[p(t)(u(t)+iv(t))']'+(q(t)+(k+i\mu)r(t))(u(t)+iv(t))=0 \tag{3.11}$$

και παίρνοντας τη συζυγή παράσταση της (3.11) συμπεραίνουμε ότι η $\overline{\varphi}(t)=u(t)-iv(t)$ είναι μία ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\overline{\lambda}=k-i\mu$. Επειδή $\lambda\neq\overline{\lambda}$, οι ιδιοσυναρτήσεις $\varphi,\overline{\varphi}$ είναι ορθογώνιες (θεώρημα 3.3), δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} r(t)(u(t)+iv(t))(y(t)-iv(t))dt=\int_{\alpha}^{\beta} r(t)\left[(u(t))^2+(v(t))^2\right]dt=0$$

που είναι άτοπο γιατί, $r(t)>0$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$ και η φ είναι διάφορη της μηδενικής αφού είναι ιδιοσυνάρτηση. Επομένως δεν υπάρχει μιγαδική ιδιοτιμή.

Θεώρημα 3.6.

Κάθε κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville με χωρισμένες δυνοριακές συνθήκες, έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\dots \quad \text{με} \lim_{n\to-\infty}\lambda_n=+\infty.$$

Για κάθε m η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση φ_m έχει ακριβώς m ρίζες στο (α,β).

Θεώρημα 3.7.

Κάθε περιοδικό πρόβλημα Sturm-Liouville έχει μία ακολουθία πραγματικών ιδιοτιμών $\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2<\lambda_3\leq\lambda_4<\dots$ με $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$.

Η απόδειξη των θεωρημάτων 3.6 και 3.7 μπορεί να βρεθεί στο [16].

- Να λυθεί:

$$\begin{pmatrix} x'' + 4x' + (4+9\lambda)x = 0 \\ x(0)=0, \quad x(\alpha)=0, \quad \alpha>0 \end{pmatrix}$$

$$\rho^2 + 4\rho + (4+9\lambda) = 0$$

$$\rho_{1,2} = \begin{cases} -2+3\sqrt{-\lambda} \\ -2-3\sqrt{-\lambda} \end{cases}$$

i. $\lambda=0 \quad x(t)=0$

ii. $\lambda<0 \quad x(t) = c_1 e^{(-2+3\sqrt{-\lambda})t} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{-\lambda})t}$

$$\left.\begin{aligned} x(0)=0 &\Rightarrow c_1+c_2=0 \\ x(a)=0 &\Rightarrow c_1 e^{(-2+3\sqrt{-\lambda})a} + c_2 e^{(-2-3\sqrt{-\lambda})a} = 0 \end{aligned}\right\} \quad x(t)=0$$

iii. $\lambda>0 \quad x(t) = e^{-2t}(c_1\cos 3\sqrt{-\lambda}\, t + c_2 \sin 3\sqrt{-\lambda}\, t)$

$x(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$x(\alpha)=0 \Rightarrow 3\sqrt{\lambda}\,\alpha = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{9\alpha^2}$

Άρα, $x_n(t) = C_n e^{-2t}\sin 3\sqrt{\lambda_n}\, t$

- Να λυθεί:

$$\begin{pmatrix} y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0 \\ y(0)=0, \quad y(1)=0 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$p(r) = r^2 - 2r + (1+\lambda) = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$

1. Για $\lambda=0$ γίνεται $y''-2y'+y=0$ οπότε έχει γενική λύση

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^x \cdot x$

2. Για $\lambda>0$ η αρχική έχει γενική λύση

$y(x) = c_1 e^x \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 e^x \cos(\sqrt{\lambda}x)$

$y(0)=0 \Rightarrow C_2=0$

$y(1)=0 \Rightarrow c_1 e \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda})=0$

$\Rightarrow \lambda = n^2\pi^2$

Άρα, οι $\lambda_n = n^2\pi^2$ είναι ιδιοτιμές και

$y_n(x) = ce^x \sin(n\pi x)$ είναι οι

ιδιοσυναρτήσεις.

3. Για $\lambda<0$, η αρχική έχει γενική λύση

$y(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0$

$y(1)=0 \Rightarrow C_1 e^{1-\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{1+\sqrt{\lambda}} = 0$

άρα $C_1=C_2=0$, οπότε δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές.

- Να λυθεί:

$$\begin{pmatrix} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0)=0, \quad y(\pi)+y'(\pi)=0 \end{pmatrix}$$