Τρίτη 05-03-2019

Ακριβείς (ή πλήρεις) διαφορικές εξισώσεις

$$y' = f(t,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

$$f(t,y) = \frac{M(t,y)}{N(t,y)} \neq 0$$

ή ισοδύναμη γραφή:

$$M(t,y)\,dt + N(t,y)\,dy = 0 \quad (1)$$

Παρατήρηση:

Αν $F(t,y)$: $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ συνεχείς

$$\underbrace{dF(t,y)}_{\text{ολικό δ.}} = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Ορισμός:

Η διαφορική μορφή $M(t,y)dt+N(t,y)dy=0$ $^{(1)}$, M,N συν: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (τόπος) ονομάζεται ακριβής, στο D, αν υπάρχει $F(t,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = M(t,y) \quad (2)$$

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial y} = N(t,y) \quad (3)$$

δηλ. (1),(2),(3) $\frac{dF}{dt}dt + \frac{dF}{dy}dy = 0$

$dF(t,y)=0 \Rightarrow F(t,y)=c$

Θεώρημα:

Έστω $M(t,y)$, $N(t,y)$ συνεχείς συναρτήσεις και με συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς t,y ($M,N: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) στο D.

↳ απλά συνεκτικό σύνολο

Τότε, υπάρχει $F(t,y)$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Απόδειξη:

$\Rightarrow)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = M \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial M}{\partial y}, \text{ δηλ. } \frac{\partial F^2}{\partial y \partial t} = \frac{\partial M}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}, \text{ δηλ. } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}. \end{array}$$

$\Leftarrow)$ Ισχύει $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ (υπόθεση)

Θα δείξουμε ότι $\exists F(t,y)$: $\frac{\partial F}{\partial t} = M^{(1)} \Rightarrow F(t,y) = \int M\,dt + h(y)$ (3)

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N^{(2)}$$

Παραγωγίζω την ως προς y.

$$\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\int M\,dt\right) + h'(y) = N$$

$$h'(y) = N - \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\int M\,dt\right)$$

$$h(y) = \int \underbrace{\left(N - \int \frac{\vartheta M}{\vartheta y}\,dt\right)}\,dy$$

Παρατήρηση:

Θα πρέπει να μην έχει t, δηλ $\frac{\vartheta}{\vartheta t}\left(N - \int \frac{\vartheta M}{\vartheta y}\,dt\right) = 0$

$$\frac{\vartheta N}{\vartheta t} - \frac{\vartheta M}{\vartheta y} = 0$$

$$\frac{\vartheta M}{\vartheta y} = \frac{\vartheta N}{\vartheta t} \quad \text{(ισχύει από υπόθεση)}$$

Γενικά, $M\,dt + N\,dy = 0$ (1)

$F(t,y) = c$

Ακριβής αν $\exists\, F(t,y)$: $\frac{\vartheta F}{\vartheta t} = M$

$\frac{\vartheta F}{\vartheta y} = N$

έχουμε: $dF(t,y) = 0$, δηλ. $F(t,y) = c \longrightarrow$ Γενική λύση (3)

Να λυθεί η δ.ε.: $\underbrace{3x^2 - 2y^2}_{M(x,y)} + \underbrace{(1-4xy)}_{N(x,y)} \dfrac{dy}{dx} = 0$ (1)

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y^2) = -4y$ (2)

$\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(1-4xy) = -4$ (3)

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

δηλ από θεώρημα, η (1) είναι ακριβής, δηλ υπάρχει $F(x,y) = c$

ολοκληρώνω ως προς x

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y^2$ (4) $\quad F(x,y) = x^3 - 2xy^2 + h(y)$ (6)

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 - 4xy$ (5)

Παραγωγίζω την (5) ως προς y και συγκρίνω με την (5)

$-4xy + h'(y) = 1 - 4xy$

$h'(y) = 1$

$h(y) = y + c_1$ (7)

(6), (7): $F(x,y) = x^3 - 2xy^2 + y + c_1$ (8)

$x^3 - 2xy^2 + y + c_1 = c_2$

Τελικά, $x^3 - 2xy^2 + y = c$ (9) $\quad F(x,y) = c$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στη σχέση (9).

Να λυθεί: $ye^{xy}\,dx + (3 + xe^{xy})\,dy = 0$ (Απ: $e^{xy} + 3y = c$)

Περιπτώσεις:

$M\,dt + N\,dy = 0$ (1)

Αν η (1) δεν είναι ακριβής, τότε πολ/με με ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t,y) \neq 0$. (2)

(1), (2):

$$(\mu M)\,dt + (\mu N)\,dy = 0 \quad (3)$$

Για να είναι ακριβής η (3), θα έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial t}(\mu N)$$

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial t} N - \mu \frac{\partial N}{\partial t}} \quad (4)$$ Μερική διαφ. εξίσωση

1. Αν $\mu = \mu(t)$ (5)

(4), (5): $$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\frac{d\mu}{dt} N = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \underbrace{\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}}_{(6)}$$

Αν $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = f(t) \quad (7)$$

(6), (7) ολοκλ.

$$\ln|\mu(t)| = \int f(t)\,dt + c_1$$

$$|\mu(t)| = e^{c_1}\cdot e^{\int f(t)dt}$$

$$\mu(t) = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} \cdot e^{\int f(t)\,dt}$$

Ένας ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι: $\boxed{\mu(t) = e^{\int f(t)dt}}$

Να λυθεί η: $$\overbrace{y^2 + 4ye^t}^{M} + \overbrace{2(y+e^t)}^{N}\frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

αν δέχεται ολοκλ. παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(t)$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$f(t) = \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial t}{N} = \frac{2y + 4e^t - 2e^t}{2y + 2e^t} = \frac{2y + 2e^t}{2y + 2e^t} = 1 \quad (2)$$

$\mu(t) = e^{\int f(t)\,dt} = e^{t}$ (3)

(1), (3): $\underbrace{y^2 e^{t} + 4y e^{2t}}_{\tilde{M}} - \underbrace{(2y e^{t} + 2e^{2t})}_{\tilde{N}} \dfrac{dy}{dt} = 0$ (4)

(4): $\dfrac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$ (6), δηλ η (4) ακριβής

Από θεώρημα υπάρχει $F(t,y) = c$

$\dfrac{\partial F}{\partial t} = y^2 e^{t} + 4y e^{2t}$ (7)

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y e^{t} + 2e^{2t}$ (8)

Ολοκληρώνω ως προς t:

$F(t,y) = y^2 e^{t} + 2y e^{2t} + h(y)$ (9)

(9) παραγωγίζω ως προς y και συγκρίνω με την (8)

$\cancel{2ye^{t}} + \cancel{2e^{2t}} + h'(y) = \cancel{2ye^{t}} + \cancel{2e^{2t}}$

$h'(y) = 0$

$h(y) = c_1$

δηλ. $y^2 e^{t} + 2y e^{2t} = c$ (10)

Η λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή στη (10)

Περίπτωση:

2. $\mu = \mu(y)$

$M dt + N dy = 0 \quad (1)$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}$$

Άρα η (1) όχι ακριβής

Πολ/ζουμε την (1) με όλους $\mu = \mu(t, y)$

$(\mu M) dt + (\mu N) dy = 0 \quad (2)$, έτσι ώστε η (2) ακριβής

δηλ. $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}} \quad (3)$$

(ii) $\mu = \mu(y)$ (4)

(4): $\dfrac{d\mu}{dy} M + \mu \dfrac{\partial M}{\partial y} = \mu \dfrac{\partial N}{\partial t}$

$$\frac{d\mu}{dy} = \underbrace{\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}}_{g(y)} \cdot \mu$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y) dy} \quad (5).$$

Να λυθεί η : $y^2 + (ty - 1)\dfrac{dy}{dt} = 0$, $y>0$ (1), αν δέχεται ολοκληρωτ
παράγοντα της μορφής $\mu = \mu(y)$.

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$, η (1) όχι ακριβής.

$$\frac{N_t - M_y}{M} = \frac{y - 2y}{y^2} = -\frac{1}{y} = g(y) \quad (2)$$

$$\mu(y) = e^{\int g(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = \frac{1}{y} \quad (3)$$

(1), (3):
$$\underbrace{y}_{\tilde{M}} + \underbrace{\left(t - \frac{1}{y}\right)}_{\tilde{N}} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (4)$$

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t}$, υπάρχει από θεώρημα $F(t,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y \quad (5) \xrightarrow[\text{ως προς } t]{\text{ολοκληρώνω}} F(t,y) = ty + h(y) \quad (7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = t - \frac{1}{y} \quad (6)$$

Παραγωγίζω την (7) ως προς y και συγκρίνω με την (6).

$$t + h'(y) = t - \frac{1}{y} \quad (8)$$
$$h'(y) = -\frac{1}{y}$$
$$h(y) = -\ln y + c_1 \quad (9)$$

Άρα, $F(t,y) = ty - \ln y + c_1$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στην αλγεβρική εξίσωση:

$$F(t,y) = ty - \ln y + c_1 = c_2$$

Γενική λύση της δ.ε.: $\boxed{ty - \ln y = c}$

Να λυθεί η δ.ε.: $(t+2)\sin y + (t\cos y)y' = 0$ (1) αν έχει ολ. παράγοντα $\mu(t) = te^{at}$ (2)

Πολ/ζω την (1) με (2):

$$\underbrace{te^{at}(t+2)\sin y}_{M} + \underbrace{te^{at}(t\cos y)}_{N}y' = 0 \quad (3)$$

Πρέπει:
$$\frac{\partial\left(te^{at}(t+2)\sin y\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(te^{at}(t\cos y)\right)}{\partial t}$$

$$\vdots$$

$$t^2 + \cancel{2t} = \cancel{2t} + at^2$$
$$a = 1 \Rightarrow \mu(t) = te^t \quad (4)$$

$(t^2+2t)e^t \sin y + (t^2 e^t \cos y)\, y' = 0 \quad (5)$

δηλ. $\exists\, F(t,y)$:

$\frac{\partial F}{\partial t} = (t^2+2t)e^t \sin y \quad (6)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = t^2 e^t \cos y \quad (7) \xrightarrow[\text{ως προς } y]{\text{ολ/ώνω}} F(t,y) = t^2 e^t \sin y + h(t). \quad (8)$

Παραγωγίζω την (8) ως προς t και συγκρίνω με την (6)

$(2te^t + \cancel{t^2 e^t}) \sin y + h'(t) = (\cancel{t^2 e^t} + 2te^t) \sin y$

$h'(t) = 0$

$h(t) = c_1 \quad (9)$

Από (8), (9): $F(t,y) = t^2 e^t \sin y + c_1$

Η λύση της δ.ε βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή στην αλγ. εξίσωση

$F(t,y) = t^2 e^t \sin y + c_1 = c_2$

Γενική λύση της δ.ε.: $\boxed{t^2 e^t \sin y = c}$