Βασίλης Χονδρός Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1η Εργασία. ΑΜ: 1112020150020

1) Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα τιμών.

i) $y' = y^2$ (1), $y(0) = 1$.

• Αν $y(t) = 0$ ικανοποιείται η Δ.Ε. αλλά όχι η αρχική συνθήκη άρα απορρίπτεται.

• Αν $y(t) \neq 0$

$$(1) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}dy = dt \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int dt + c \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \ (2)$$

$$(2) \xrightarrow[y=1]{t=0} -1 = 0 + c \Rightarrow c = -1 \overset{(2)}{\Rightarrow} -\frac{1}{y} = t - 1 \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{1-t}}$$

ii) $y' = y^2$ (1), $y(1) = 0$.

• Η συνάρτηση $y(t) = 0$ είναι λύση της Δ.Ε. και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη. Άρα είναι λύση του ΠΑΤ. $\boxed{y(t) = 0}$

• Αν $y(t) \neq 0$ δεν ικανοποιείται η αρχική συνθήκη $y(1) = 0$.

iii) $y' = -y^2$ (1) $y(1) = a$ (2)

• Αν $a = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} y(1) = 0$.

• Η συνάρτηση $y(t) = 0$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. και την αρχική συνθήκη άρα είναι λύση του ΠΑΤ.

• Αν $y(t) \neq 0$ δεν ικανοποιείται η αρχική συνθήκη.

Άρα για $a = 0$: $\boxed{y(t) = 0}$

• Αν $a \neq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} y(1) = a \neq 0$ (3)

• Η συνάρτηση $y(t) = 0$ ικανοποιεί τη Δ.Ε. αλλά όχι την αρχική συνθήκη άρα απορρίπτεται.

• Αν $y(t) \neq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{dy}{dt} = -y^2 \Rightarrow -\frac{1}{y^2}dy = dt \Rightarrow \int -\frac{1}{y^2}dy = \int dt + c \Rightarrow \frac{1}{y} = t + c$ (4) $\xrightarrow[y=a]{t=1}$

$$\frac{1}{a} = 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{a} - 1 \qquad (4) \Rightarrow \frac{1}{y} = t + \frac{1}{a} - 1 = \frac{at - a + 1}{a} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{a}{a \cdot (t-1) + 1}}$$

iv) $y' = t^2(y-1)$ (1), $y(0) = 2$.

• Αν $y(t) = 1$ ικανοποιείται η Δ.Ε. αλλά όχι η αρχική συνθήκη άρα απορρίπτεται.

• Αν $y(t) \neq 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dt} = t^2(y-1) \Rightarrow \frac{1}{y-1}dy = t^2 dt \Rightarrow \int \frac{1}{y-1}dy = \int t^2 dt + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln|y-1| = \frac{t^3}{3} + c_1 \Rightarrow |y-1| = e^{c_1} e^{t^3/3} \Rightarrow |y-1| = c_2 \cdot e^{t^3/3}, \ c_2 = e^{c_1} > 0 \ (2)$$

$$\Rightarrow y - 1 = \pm c_2 \cdot e^{t^3/3} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = c_2 e^{t^3/3} \\ \text{ή} \\ y - 1 = -c_2 \cdot e^{t^3/3} \end{cases} \xrightarrow[y=2]{t=0} \begin{cases} 1 = c_2 \\ \text{ή} \\ c_2 = -1 \end{cases} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = 1 + e^{t^3/3}}$$

v) $y'+y=\int_0^2 y(t)\,dt$ (1), $y(0)=1$ (2)

Το δεξί μέλος είναι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα άρα είναι μια σταθερά. Παραγωγίζοντας αριστερό και δεξί μέλος έχουμε:

$y''+y'=0$. Θέτουμε $y'=u$ (6), $u'+u=0 \Rightarrow u'=-u$ (3)

· Αν $u=0$ ικανοποιείται η Δ.Ε. (4)

· Αν $u(t)\neq 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{u}du=-dt \Rightarrow \int \frac{1}{u}du=-\int dt+c \Rightarrow \ln|u|=-t+c_1 \Rightarrow |u|=e^{-t}\cdot e^{c_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(t)=\pm e^{c_1}\cdot e^{-t} \Rightarrow u(t)=c_2\cdot e^{-t},\ c_2\neq 0$ (5)

$\Rightarrow u(t)=\begin{cases}0\\ c_2\cdot e^{-t}, & c_2\neq 0\end{cases}$. Η γενική λύση γράφεται ως $u(t)=c_3 e^{-t},\ c_3\in\mathbb{R}$

(6) $\Rightarrow y'=u \Rightarrow \frac{dy}{dt}=c_3\cdot e^{-t} \Rightarrow dy=c_3\cdot e^{-t}dt \Rightarrow \int dy=c_3\int e^{-t}dt+c_4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y(t)=-c_3 e^{-t}+c_4$. (10) $y(0)=1 \Rightarrow c_4-c_3=1$ (7)

(8) $y'(t)=c_3\cdot e^{-t}$, $\int_0^2 y(t)dt=\int_0^2(-c_3 e^{-t}+c_4)dt=c_3\cdot\int_0^2(-e^{-t})dt+c_4\int_0^2 dt=$

$=c_3\cdot e^{-t}\Big|_0^2+c_4\cdot t\Big|_0^2=c_3\cdot(e^{-2}-1)+2c_4$ (9)

(1) $\xrightarrow[(9)]{(8)}$ $-\cancel{c_3 e^{-t}}+c_4+\cancel{c_3 e^{-t}}=c_3\cdot(e^{-2}-1)+2c_4 \Rightarrow c_4+c_3(e^{-2}-1)=0$ (11)

(11), (7) $\Rightarrow \begin{cases}c_4=c_3+1\\ c_4+e^{-2}c_3-c_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_4=c_3+1\\ c_3+1-c_3+e^{-2}c_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c_4=1-e^2\\ c_3=-e^2\end{cases}$

(10) $\Rightarrow \boxed{y(t)=e^{2-t}+1-e^2}$

vi) $y'+\frac{1}{t}\cdot y=0$ (1) $t>0$, $y(1)=2$ (2)

· Η λύση $y(t)=0$ απορρίπτεται γιατί δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

· $y'+\frac{1}{t}y=0 \xrightarrow[t>0]{\cdot t} t\cdot y'+y=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(t\cdot y)=0 \Rightarrow t\cdot y=c \xrightarrow[t=1,\,y=2]{(2)} c=2$

$\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{2}{t}},\ t>0$

2) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. $t\cdot y'+6y=3ty^{4/3}$ (1)

· Η συνάρτηση $\boxed{y(t)=0}$ είναι λύση της Δ.Ε.

· Για $t\neq 0$: $y'+\frac{6}{t}y=3\cdot y^{4/3}$ (4), Θέτουμε $u=y^{1-\frac{4}{3}}$ (2), $u'=(1-\frac{4}{3})\cdot y^{-\frac{4}{3}}\cdot y'$ (3)

(4) $\underset{(2)(3)}{\Rightarrow}$ $y'+\frac{6}{t}\cdot y=3\cdot y^{4/3} \Rightarrow (1-\frac{4}{3})\cdot y^{-4/3}y'+(1-\frac{4}{3})\cdot\frac{6}{t}\cdot y^{1-\frac{4}{3}}=3\cdot(1-\frac{4}{3})$

$\Rightarrow u'-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{t}u=3\cdot(-\frac{1}{3}) \Rightarrow u'-\frac{2}{t}u=-1.$

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $h(t)=e^{\int -\frac{2}{t}dt}=e^{-2\ln t}=\frac{1}{t^2}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{t^2}\cdot u'-\frac{2}{t^3}\cdot u=-\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^2}\cdot u\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \frac{1}{t^2}\cdot u=\frac{1}{t}+c \Rightarrow u(t)=ct^2+t$

$② \Rightarrow c\cdot t^2 + t = y^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{(ct^2+t)^3}, t \neq 0$

Για $t=0 \overset{①}{\Rightarrow} y(0)=0$.

Άρα η γενική λύση είναι $\boxed{y(t)=0, t\in\mathbb{R}}$, $\boxed{y(t) = \frac{1}{(ct^2+t)^3}, t\in\mathbb{R}^*}$

3) $y' = 1+t^2-2ty+y^2 \Rightarrow y'+2ty = y^2+1+t^2$ ①

Μια λύση της εξίσωσης είναι $y_1(t) = t$

$① \underset{y(t)=t}{\Longrightarrow} \cancel{1}+\cancel{2t^2} = \cancel{t^2}+\cancel{1}+\cancel{t^2} \Rightarrow 0=0$ άρα την ικανοποιεί ταυτοτικά.

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό: $y(t) = y_1(t)+\frac{1}{u} = t+\frac{1}{u}$ ②, $y' = 1-\frac{u'}{u^2}$ ③

$① \overset{②}{\underset{③}{\Longrightarrow}} 1-\frac{u'}{u^2}+2t\left(t+\frac{1}{u}\right) = \left(t+\frac{1}{u}\right)^2+1+t^2 \Leftrightarrow \cancel{1}-\frac{u'}{u^2}+\cancel{2t^2}+\cancel{\frac{2t}{u}} = \cancel{t^2}+\cancel{\frac{2t}{u}}+\frac{1}{u^2}+\cancel{1}+\cancel{t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} \Rightarrow -u' = 1 \Rightarrow u = -t+c$ ④

$② \overset{④}{\Longrightarrow} \boxed{y(t) = t+\frac{1}{c-t}}$

④. Να λυθεί η Δ.Ε. $ty'-y = t^2 > 0$

α) $ty'-y = t^2 \overset{:t^2}{\Rightarrow} \frac{ty'-y}{t^2} = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{t}\right) = 1 \Rightarrow \frac{y}{t} = t+c \Rightarrow \boxed{y(t) = t^2+ct}$

β) $ty'-y = t^2 \overset{:t}{\Rightarrow} y' - \frac{1}{t}y = t$ Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t}dt} = e^{\ln\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{t}\cdot y' - \frac{1}{t^2}y = 1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\cdot y\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{t}\cdot y = t+c \Rightarrow \boxed{y(t) = t^2+ct}$