1) i) $\begin{pmatrix} y'=y^2 \\ y(0)=1 \end{pmatrix}$ (I) Αφού έχουμε $y(0)=1$ η $y(t)=0$ δεν είναι λύση

II) Με $y(t)\neq 0$: $y'=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dt \Rightarrow -\frac{1}{y}=t+c$ με $c\in\mathbb{R}$. Άρα $\frac{1}{y}=-t-c \Rightarrow y=-\frac{1}{t+c}$ με $t\neq -c$. Από υπόθεση $y(0)=1 \Rightarrow -\frac{1}{c}=1 \Rightarrow c=-1$ Άρα $\boxed{y(t)=-\frac{1}{t-1}}$ με $t\neq -1$

ii) (I) Η $y(t)$ ικανοποιεί την υπόθεσή μας ~~α~~ και είναι λύση.

(II) Ομοίως από το (i) έχουμε $y(t)=-\frac{1}{t+c}$, $t\neq -c$ και ~~απο~~ η αρχική συνθήκη είναι $y(1)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{t+1}=0 \Leftrightarrow -1=0$ το οποίο δεν ισχύει. Άρα η μόνη λύση του προβλήματος είναι η $y(t)=0$

iii) $\begin{pmatrix} y'=-y^2 \\ y(1)=a \end{pmatrix}$ (I) Η λύση $y(t)=0$ είναι δεκτή αν $a=0$. Η $y(t)=0$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση και την αρχική τιμή άρα αποτελεί λύση.

(II) Αν $y(t)\neq 0$ τότε και $a\neq 0$ (και προφανώς $y(1)\neq 0$). Η $y(t)\neq 0$ δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη με αποτέλεσμα να απορρίπτεται ως λύση.

Αν $y(t)\neq 0 \rightarrow \frac{dy}{dt}=-y^2 \Rightarrow -\frac{dy}{y^2}=dt$ ολοκληρώνοντας:

$\frac{1}{y}=t+c$ (1) με $c\in\mathbb{R}$ και σε αυτό αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη $y(1)=a$. Άρα $\frac{1}{a}=1+c \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{a}-1}$. Στην (1): $y(t)=\frac{a}{at-a+1} \Rightarrow$

$\boxed{y(t)=\frac{a}{a(t-1)+1}}$

iv) $\begin{pmatrix} y' = t^2(y-1) \\ y(0)=2 \end{pmatrix}$

(I) Αν $y(t)=1$ δεν ικανοποιείται η αρχική συνθήκη αν και είναι λύση της Δ.Ε. Επομένως απορρίπτεται.

(II) Αν $y(t)\neq 1 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=t^2(y-1) \Rightarrow \frac{dy}{y-1}=t^2 dt \Rightarrow \ln|y-1|=\frac{t^3}{3}+c_1$

$\Rightarrow |y-1| = e^{\frac{t^3}{3}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2} \Rightarrow |y-1| = e^{\frac{t^3}{3}} \cdot c_2$ (1). Άρα $y-1 = \pm c_2 e^{\frac{t^3}{3}}$

$\Rightarrow \begin{cases} y=1+c_2 e^{\frac{t^3}{3}} \\ y=1-c_2 e^{\frac{t^3}{3}} \end{cases} \xRightarrow{y(0)=2} \begin{cases} c_2=1 \\ c_2=-1 \end{cases}$ όμως $c_2=e^{c_1}>0$ Άρα $c_2=1$

Άρα δεκτή η $\boxed{y=1+e^{\frac{t^3}{3}}}$

v) $y'+y=\int_0^2 y(t)dt$, $y(0)=1$

Παρατηρώ ότι το δεξί μέλος αποτελείται από ολοκλήρωμα το ~~αποτελείται από ολοκλήρωμα το~~ ~~[illegible]~~

οποίο μπορούμε να το θεωρήσουμε σταθερά. Άρα αν παραγωγίσουμε τη Δ.Ε: $y''+y'=0 \xRightarrow{y'=u} u'+u=0 \Rightarrow u'=-u$

I) Αν $u(t)=0$ τότε είναι λύση της Δ.Ε.

II) Αν $u(t)\neq 0 \Rightarrow \frac{du}{u}=dt \Rightarrow \ln|u|=-t+c_1$ Άρα $|u(t)|=\overset{c_2\neq 0}{e^{c_1}}\cdot e^{-t}>0$ Άρα

$u(t)=c_2 e^{-t}$. Άρα τελικά έχουμε $u(t)=c_3 e^{-t}$ με $c_3\in\mathbb{R}$.

όμως $u=y' \Rightarrow \frac{dy}{dt}=c_3 e^{-t} \Rightarrow dy=c_3 e^{-t}dt \Rightarrow \boxed{y(t)=-c_3 e^{-t}+c_4}$ (1)

και από αρχική συνθήκη $y(0)=1 \Rightarrow \boxed{c_4-c_3=1}$ (2)

και ολοκληρώνοντας την (1): $\int_0^2 y(t) = \int_0^2(-c_3 e^{-t}+c_4)dt = \int_0^2 c_4 dt - \int_0^2 c_3 e^{-t}dt$

$= c_4(2-0)+c_3(e^{-2}-1) = 2c_4+c_3(e^{-2}-1)$. Αντικαθιστώντας στην αρχική

διαφ. εξ. $-c_3e^{-t}+c_4+c_3e^{-t} = c_3(e^{-2}-1)+2c_4 \Rightarrow c_4+c_3(e^{-2}-1)=0$

$\Rightarrow c_4-c_3+c_3e^{-2}=0 \xRightarrow{(2)} 1+c_3e^{-2}=0 \Rightarrow \boxed{c_3=-e^2}$ (3) $\xrightarrow{(2)} \boxed{c_4=1-e^2}$ (4)

Τελικά $\boxed{y(t)=e^{2-t}+1-e^2}$ ③

vi) $\begin{pmatrix} y'+\frac{1}{t}y=0 \\ t>0,\ y(1)=2 \end{pmatrix}$ $y'=-\frac{1}{t}y$

(I) Η $y(t)=0$ δεν είναι λύση διότι δεν ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

~~(II) $y(t)\neq 0$: $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t}y \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|y|=-\ln t+c_1$~~

~~$\Rightarrow |y|=e^{c_1}$~~

(II) $y(t)\neq 0$: $y'+\frac{1}{t}y=0 \Rightarrow ty'+y=0 \Rightarrow (ty)'=0 \overset{c\in\mathbb{R}}{\underset{t>0}{\Rightarrow}} ty=c$

$\Rightarrow y(t)=\frac{c}{t} \overset{y(1)=2}{\Rightarrow} c=2$ Άρα $\boxed{y(t)=\frac{2}{t}}$ με $t>0$

2) $ty'+6y=3ty^{4/3}$

I) Παρατ. ότι η $y(t)=0$ είναι λύση της Δ.Ε.

II) Αλλιώς $(\neq 0)$: $y'+\frac{6}{t}y=3y^{4/3}$. Σε αυτή τη μορφή είναι Δ.Ε. Bernoulli με $r=\frac{4}{3}$ και $1-r=-\frac{1}{3}$. Με τον μετασχηματισμό $u=y^{-\frac{1}{3}}$ προκύπτει

$\frac{du}{dt}-\frac{2}{t}u=-1$ ~~$\frac{du}{dt}=\frac{2dt}{t}$ ... $\ln|u|=2\ln t=t$~~ ~~$\ln t=\ln t^2$~~ Θεωρούμε $\mu(t)=e^{\int-\frac{2}{t}dt}=\frac{1}{t^2}$ με το οποίο πολλαπλασιάζω κάθε όρο: $\frac{1}{t^2}\frac{du}{dt}-\frac{2}{t^3}u=-\frac{1}{t^2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{u}{t^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow \frac{u}{t^2}=\frac{1}{t}+c$

$\Rightarrow \boxed{u(t)=ct^2+t,\ c\in\mathbb{R}}$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό $y=u^{-3}$. Άρα $y(t)=\frac{1}{(t+ct^2)^3}$, $t>0$ ή $t<0$ η οποία είναι η γενική λύση.

3) $y'=1+t^2-2ty+y^2$

η εξίσωση είναι Δ.Ε Riccati με $p(t)=2t$, $q(t)=-1$, $f(t)=1+t^2$ στη μορφή: $y'=1+(t-y)^2$

Η $y_1(t)=t$ είναι μια ειδική λύση. Με την αλλαγή μεταβλητής $y(t)=y_1(t)+u(t)=t+u(t)$. Αντικαθιστώντας την εξίσωση έχουμε $1+u'(t)=1+t^2-2t(t+u(t))+(t+u(t))^2=1+u^2(t)$ έπεται ότι $u'=u^2$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει γενική λύση $u(t)=\frac{1}{c-t}$ επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή παίρνουμε τη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης $y(t)=t+\frac{1}{c-t}$

4)

$ty' - y = t^2 \Rightarrow y' - \frac{1}{t}y = t$ Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα

$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t}dt} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{t}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{y}{t} = t + c$