ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 1.

1) Να λυθούν τα κάτωθι προβλήματα αρχικών τιμών:

i) $\begin{pmatrix} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$

(I) Η $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ θα μπορούσε γενικά να είναι ιδιάζουσα λύση, αλλά έχουμε $y(0) = 1 > 0$ άρα δεν μπορεί να ισχύει.

II) $y' = y^2 \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2} = 1$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c \Rightarrow \frac{1}{y} = -t - c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{t+c}$$ γενική λύση για $t \neq -c$

όμως $y(0) = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{c} = 1 \Rightarrow c = -1$

Άρα $y(t) = -\dfrac{1}{t-1}$, $t \neq 1$ $\left(t \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)\right)$

όμως η λύση μπορεί να ανήκει μόνο σε ένα διάστημα άρα αφού $\exists\, y(0) \Rightarrow t \in (-\infty, 1)$

Τελικά: $$\boxed{y(t) = -\frac{1}{t-1}, \quad t \in (-\infty, 1)}$$

ii) (I) Η $\boxed{y(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}}$ ικανοποιεί την εξίσωση και αυτή τη φορά και την αρχική συνθήκη $y(1)=0$, άρα είναι λύση.

(II) Η γενική λύση είναι (από το i))

$$y(t)=-\frac{1}{t+c},\quad t\neq -c$$ (→ σε κάποιο από τα $(-\infty,-c)$ ή $(-c,+\infty)$)

Ισχύει $y(1)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{1+c}=0 \Leftrightarrow -1=0$ <u>αδύνατο</u>

Άρα Δεν υπάρχει λύση της μορφής $y(t)=-\frac{1}{t+c}$ για κάποιο διάστημα.

Τελικά $\boxed{y(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}}$

iii) (I) Η $y(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ είναι λύση αν και μόνο αν $\alpha=0$.

<u>Απόδειξη</u>

($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $y(t)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ είναι λύση
άρα $y(1)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\alpha=0$
Έστω ότι η $y(t)=0,\ t\in\mathbb{R}$ <u>δεν</u> είναι λύση
τότε κάνουμε επίλυση:

$$y'=-y^2 \Rightarrow -\frac{y'}{y^2}=1 \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)'=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}=t+c \Rightarrow y=\frac{1}{t+c}$$ γενική λύση, για ένα διάστημα της μορφής $(-\infty,-c)$ ή $(-c,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι τώρα $y(t)\neq 0,\ \forall t\in\{$σε ένα από τα $(-\infty,-c)$ ή $(-c,+\infty)\}$ άρα $y(1)\neq 0$
$\Rightarrow \alpha\neq 0$ Άτοπο

[Άρα η $y(t)=0$ <u>είναι</u> λύση, $\forall t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \alpha=0$]

iv) $y' = t^2(y-1)$, $y(0)=2$

I) Η $y(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ δεν είναι λύση της δ.ε.

αφού δεν ικανοποιείται με αυτή η συνθήκη $y(0) = 2$ $(\neq 1)$

II) Λύνουμε χωρίζοντας τις μεταβλητές: για $y \neq 1$

$$\frac{y'}{y-1} = t^2 \Rightarrow (\ln|y-1|)' = t^2$$

$$\Rightarrow \ln|y-1| = \tfrac{1}{3}t^3 + c_1$$

$$\Rightarrow |y-1| = e^{\frac{1}{3}t^3 + c_1} \Rightarrow |y-1| = c\, e^{1/3\, t^3}$$

Αν $y>1$ $\longrightarrow$ $y - 1 = c\, e^{1/3\, t^3}$

$\Rightarrow y = c\, e^{1/3\, t^3} + 1$

Θέλουμε

$y(0) = 2 \Rightarrow c + 1 = 2 \Rightarrow \underline{c = 1}$

άρα $y(t) = e^{1/3\, t^3} + 1$, $t \in \mathbb{R}$

Αν $y<1$ $\longrightarrow$ $y - 1 = -c\, e^{1/3\, t^3}$

$\Rightarrow y = 1 - c\, e^{1/3\, t^3}$

Θέλουμε

$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = 1 - c \Rightarrow c = -1$

άρα $y(t) = 1 + e^{1/3\, t^3}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Τελικά έχουμε

$$\boxed{y(t) = 1 + e^{1/3\, t^3}, \forall t \in \mathbb{R}}$$

II) Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$

Έτσι, η $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι λύση, αφού δεν ικανοποιεί την $y(1) = \alpha \ (\neq 0)$

Είδαμε ότι η γενική λύση είναι

$$y(t) = \frac{1}{t+c}, \quad t \in \{\text{σε ένα από τα } (-\infty, -c) \text{ ή } (-c, +\infty)\}$$

Φυσικά πρέπει να ικανοποιείται η $y(1) = \alpha$

$\iff \alpha = \frac{1}{1+c} \iff c = \frac{1-\alpha}{\alpha}$

άρα $y(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad t \in \{\text{σε ένα από τα } (-\infty, \frac{\alpha-1}{\alpha}) \text{ ή } (\frac{\alpha-1}{\alpha}, +\infty)\}$

Θέλουμε το $y(1)$ να ορίζεται τελικά στο διάστημα που θα διαλέξουμε:

Λύνουμε για $\alpha > 0$: $\frac{\alpha-1}{\alpha} > 1 \iff \alpha - 1 > \alpha \iff -1 > 0$ αδύνατον

άρα $\frac{\alpha-1}{\alpha} < 1, \ \forall \alpha > 0$

Δηλαδή $t \in (\frac{\alpha-1}{\alpha}, +\infty)$

Λύνουμε για $\alpha < 0$: $\frac{\alpha-1}{\alpha} > 1 \iff \alpha - 1 < \alpha \iff -1 < 0$ ισχύει $\forall \alpha < 0$

άρα $\frac{\alpha-1}{\alpha} > 1, \ \forall \alpha < 0$ Άρα $t \in (-\infty, \frac{\alpha-1}{\alpha})$

Τελικά:

i) Αν $\alpha = 0$: $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

ii) Αν $\alpha > 0$: $y(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad t \in (\frac{\alpha-1}{\alpha}, +\infty)$

iii) Αν $\alpha < 0$: $y(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1-\alpha}{\alpha}}, \quad t \in (-\infty, \frac{\alpha-1}{\alpha})$

V) $y' + y = \int_0^2 y(t)\,dt$ (1) με $y(0) = 1$

Θέτουμε $c_1 = \int_0^2 y(t)\,dt$

Η (1) γίνεται: $y' + y = c_1$ ($\rightarrow$ γραμμική $1^{ης}$ τάξης)

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $\mu(t) = e^{\int dt} = e^t$

άρα $e^t y' + e^t y = c_1 e^t$

$\Rightarrow (e^t y)' = c_1 e^t$

$\Rightarrow e^t y = c_1 e^t + c$

$\Rightarrow y = c_1 + c e^{-t}$

Όμως $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c$ (2)

$c_1 = \int_0^2 y(t)\,dt \Rightarrow c_1 = \int_0^2 c_1 + c e^{-t}\,dt$

$\Rightarrow c_1 = \left[c_1 t - c e^{-t}\right]_0^2 \Rightarrow c_1 = 2c_1 - c e^{-2} + c$

$\Rightarrow 0 = c_1 + c(1 - e^{-2})$

$\Rightarrow c_1 = c(e^{-2} - 1)$ (3)

(2) $\xRightarrow{(3)}$ $1 = c(e^{-2} - 1) + c \Rightarrow c e^{-2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = e^{+2}}}$

άρα $c_1 = 1 - e^2$

Τελικά $\boxed{y(t) = 1 - e^2 + e^{2-t}}$

Πεδίο ορισμού της γενικής λύσης

$$y(t) = \frac{1}{(t^2 + ct^3)^3}$$

λύνουμε $(t^2+ct^3)^3=0 \Rightarrow t^2(1+ct)=0$

$\Rightarrow t=0$ ή $t=-\frac{1}{c}$

απορ. στην γενική λύση πήραμε $t\neq 0$

↳ άρα πρέπει $t\neq -\frac{1}{c}$

όμως η λύση πρέπει να ορίζεται σε ένα διάστημα, συνεπώς $t\in(-\infty, -\frac{1}{c})$ ή $t\in(-\frac{1}{c}, +\infty)$

vi) $y' + \frac{1}{t} y = 0 \quad , t>0 , \quad y(1) = 2.$

γραμμική 1ης τάξης με ολοκληρωτικό παράγοντα

$\mu(t) = e^{\int t^{-1} dt} = e^{\ln t} \Rightarrow \mu(t) = t.$

άρα $\quad ty' + y = 0 \Rightarrow (ty)' = 0$

$\Rightarrow ty = c \Rightarrow y = \frac{c}{t}$

$y(1) = 2 \Rightarrow c = 2$ άρα τελικά

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{t}}.$$

---

2) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε. :

$ty' + 6y = 3ty^{4/3} \quad (1)$

Η $y(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί την (1)

Για $y \neq 0$:

Θέτουμε $\quad u = y^{1-4/3} \Rightarrow u = y^{-1/3}$

$\Rightarrow u' = -\frac{1}{3} y^{-4/3} y'$

$(1) \overset{\cdot\left(-\frac{1}{3}y^{-4/3}\right)}{\Longrightarrow} \quad -\frac{1}{3} t y^{-4/3} y' - 6 \frac{1}{3} y^{-4/3} y = -3\frac{1}{3} y^{4/3} y^{-4/3} t$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} t y' y^{-4/3} - 2 y^{-1/3} = -t$

$\Rightarrow tu' - 2u = -t$ ~~(γραμμική 1ης τάξης)~~

Υποθέτουμε $t \neq 0$:

$u' - 2\frac{1}{t} u = -1$ (γραμμική 1ης τάξης με

$\mu(t) = e^{\int -2t^{-1} dt} = e^{-2\ln t} = e^{\ln t^{-2}} = t^{-2}$)

άρα $\quad t^{-2} u' - 2t^{-3} u = -t^{-2} \Rightarrow (t^{-3} u)' = -t^{-2}$

$\Rightarrow t^{-3} u = t^{-1} + c \Rightarrow u = t^2 + ct^3$

$\Rightarrow y^{-1/3} = t^2 + ct^3 \Rightarrow y(t) = (t^2 + ct^3)^{-3} \rightarrow$ γενική λύση

με $y(t) = 0$ ιδιάζουσα

3) Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. :

$$y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2 \quad (1)$$

Η $y_1(t) = t$ προφανώς ικανοποιεί την (1) και είναι μια λύση της.

Θέτουμε $y = t + \frac{1}{u} \Rightarrow y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$

$$y^2 = t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2}$$

Η (1) γράφεται:

$$y' + 2ty = y^2 + t^2 + 1$$

αντικαθιστώντας έχουμε:

$$1 - \frac{u'}{u^2} + 2t\left(t + \frac{1}{u}\right) = t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2} + t^2 + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} + 2t^2 + \frac{2t}{u} = 2t^2 + \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{u^2} \qquad -u' = 1 \Rightarrow u' = -1$$

$$\Rightarrow u = -t + c$$

Τελικά $y(t) = t + \frac{1}{c-t}$, $c \neq t$

και ορίζεται σε ένα από τα $t \in (-\infty, c)$ ή $t \in (c, +\infty)$

4) Να λυθεί η δ.ε. :

$ty' - y = t^2, \quad t > 0 \quad (1)$

Αφού $t > 0$:

$$y' - \frac{1}{t} y = t \Longrightarrow \frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} y = 1$$

$$\Rightarrow \left(y \frac{1}{t} \right)' = 1 \Rightarrow \frac{y}{t} = t + c \Rightarrow \boxed{y = ct + t^2}.$$

$t \in \mathbb{R}$.